Partie VI : Mécanique
Chapitre 6

Mouvement dans un champ de force centrale

I Conséquences générales pour une force centrale

$\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$

1 - Étude avec le moment cinétique

a/ Conservation du moment cinétique

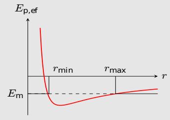
$\vec{F} // \overrightarrow{OM} \Rightarrow \vec{\sigma}_0 = \vec{\text{cst}} \Rightarrow$
- mouvement plan
- loi des aires, $r^2\dot{\theta} = C = \text{cst}$ (coord. polaires dans plan du mvt)

b/ et c/ Démonstrations

2 - Étude énergétique

a/ Énergie potentielle effective $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}$

b/ Type de mouvement
- $E_m \geq 0$: état de diffusion
- $E_m < 0$: état lié



II Application aux planètes et satellites

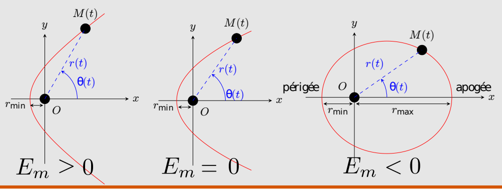
1 - Rappels sur la loi de Newton

$$\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\vec{e}_r$$
$$E_p = -G\frac{mm'}{r}$$

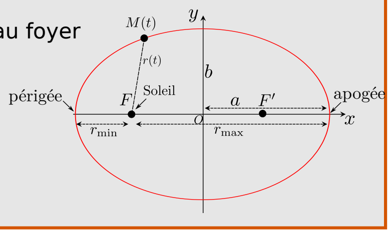
2 - Référentiels
- Terrestre, géocentrique, héliocentrique

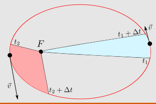
3 - Nature des trajectoires

hyperbole parabole ellipse



4 - Lois de Kepler
- orbite = ellipse avec Soleil au foyer
- aires balayées égales en des temps égaux
- T^2 proportionnel à a^3





5 - Étude d'un satellite en orbite circulaire

a/ Particularités de l'orbite circulaire
- *v* uniforme
- savoir exprimer la période
- et la vitesse (8 km/s si $r = R_T$)
- et E_m

b/ Cas géostationnaire
- T=24h, circulaire, plan équatorial
- savoir calculer l'altitude

6 - Vitesse de libération
- *v* minimale telle que $E_m \geq 0$ (état de diffusion)
- sur Terre : 11km/s.
- Savoir la calculer.

Ce qu'il faut connaître

——————— (cours : II)

▶1 Quelles sont les définitions des référentiels terrestre, géocentrique et héliocentrique ?

Décrire le mouvement de la Terre dans chacun.

▶2 Qu'appelle-t-on un champ de force newtonnien ?

▶3 Donner l'expression de la force gravitationnelle exercée par une masse M_S située en O, sur une masse m située en M une distance $r = OM$.

Donner l'expression de l'énergie potentielle dont dérive cette force.

▶4 Énoncer les trois lois de Kepler.

▶5 Quel est l'ordre de grandeur de la vitesse en orbite basse et de la vitesse de libération dans le cas de la Terre ?

Ce qu'il faut savoir faire

——————— (cours : I)

▶6 Pour un point matériel soumis à une force centrale, démontrer la conservation du moment cinétique, en déduire des conséquences (mouvement plan, loi des aires). → **EC1**

▶7 Exprimer la conservation de l'énergie mécanique, construire une énergie potentielle effective. L'utiliser pour décrire qualitativement le mouvement radial (état lié ou état de diffusion).

——————— (cours : II)

►$_8$ Cas particulier d'un mouvement circulaire : montrer que le mouvement est uniforme, calculer sa période, calculer la vitesse en orbite basse. → **EC2**

►$_9$ Satellite géostationnaire : justifier le type d'orbite, calculer l'altitude du satellite. → **EC3**

►$_{10}$ Définir et exprimer la vitesse de libération. → **EC4**

Exercices de cours

Exercice C1 – Conservation du moment cinétique et conséquences

On considère un point M de masse m soumis à un champ de force centrale $\vec{F}$, de centre O.

1 - Montrer que le moment cinétique en O est conservé au cours du mouvement.

2 - On note $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{\sigma}_O$.
Montrer qu'à tout instant, $\overrightarrow{OM}$ est perpendiculaire à $\vec{e}_z$, et donc que le mouvement est dans le plan Oxy.

3 - On utilise les coordonnées polaires dans le plan Oxy.
Montrer que la conservation du moment cinétique implique que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est constante au cours du mouvement.
Comment interprète-t-on ceci géométriquement ?

Exercice C2 – Particularités de l'orbite circulaire

On considère un satellite en orbite autour de la Terre, dans le cas particulier où cette orbite est **circulaire**, dont on note R le rayon.

On se place dans le référentiel géocentrique, muni d'un repère polaire dans le plan de l'orbite, de centre O (centre de la Terre). On note M le point repérant le satellite, et m sa masse.

On note $R_T = 6400\,\text{km}$ le rayon de la Terre et $M_T = 6{,}0\times 10^{24}\,\text{kg}$ sa masse. On donne $G = 6{,}67\times 10^{-11}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$.

1 - Montrer que le mouvement est circulaire uniforme, c'est-à-dire que la norme du vecteur vitesse (ou la vitesse angulaire) est constante. On pourra pour cela appliquer le PFD au satellite.

2 - Donner l'expression de la période du mouvement en fonction du rayon R, de la masse de la Terre M_T et de la constante G.

On remarque que ceci permet de retrouver la troisième loi de Kepler (mais cette 3$^\text{e}$ loi est plus générale car elle est aussi valable pour les mouvements elliptiques, dont le cercle n'est qu'un cas particulier).

3 - Orbite basse : Le satellite est en orbite basse, donc à une altitude (mesurée par rapport à la surface de la Terre) $h \ll R_T$. Sa distance au centre de la Terre O est donc $R = R_T + h \simeq R_T$.

a - Calculer sa période de révolution autour de la Terre.

b - Donner l'expression de sa vitesse en fonction de G, M_T et R, et faire l'application numérique.
Cette vitesse, qui est celle nécessaire à la mise en orbite d'un objet à altitude nulle, est appelée première vitesse cosmique.

Ceci s'applique pour les satellites assez bas, comme par exemple l'ISS ($h = 400\,\text{km}$).

4 - Énergie mécanique : donner l'expression de l'énergie mécanique de la masse m en fonction de G, M_T, m et R, et montrer qu'elle est bien négative.

Exercice C3 – Satellite géostationnaire

On considère un satellite en orbite autour de la Terre, dans le cas particulier où cette orbite est **circulaire**, dont on note R le rayon.

On se place dans le référentiel géocentrique, muni d'un repère polaire dans le plan de l'orbite, de centre O (centre de la Terre). On note M le point repérant le satellite, et m sa masse.

On note $R_T = 6400\,\text{km}$ le rayon de la Terre et $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$ sa masse. On donne $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

On considère un satellite géostationnaire.

1 - Expliquer en quoi "géostationnaire" consiste, et quel type d'orbite cela implique (en terme de forme, de localisation et de période).

2 - Donner l'expression de la période du mouvement en fonction du rayon R, de la masse de la Terre M_T et de la constante G.

On pourra pour cela appliquer le PFD au satellite (identique questions 1 et 2 de l'EC précédent).

3 - En déduire la distance R, puis l'altitude h par rapport au sol.

Exercice C4 – Vitesse de libération

On lance un satellite de masse m depuis la surface terrestre, avec une vitesse initiale v_0. On souhaite que ce satellite s'éloigne indéfiniment de la Terre (par exemple pour atteindre Mars...). On cherche la vitesse minimale à lui communiquer.

On note $R_T = 6400\,\text{km}$ le rayon de la Terre et $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$ sa masse. On donne $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

1 - Écrire l'expression de l'énergie mécanique. Que devient-elle lorsque $r \to +\infty$?

Quel est donc nécessairement le signe de E_m pour une telle orbite ouverte ?

2 - En déduire la valeur minimale de v_0.

Cours

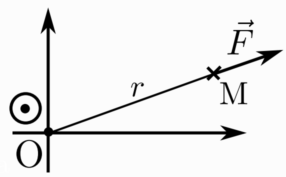
Introduction

Définition : force centrale

Une force centrale de centre O est une force dont la direction est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ et dont la norme ne dépend que de $r = OM$ (M est le point d'application de la force).

Elle s'exprime donc, dans un repère en coordonnées sphériques centré sur O, comme

$$\boxed{\vec{F} = F(r)\,\vec{e}_r.}$$



Une force centrale est toujours conservative : il existe une fonction $E_p(r)$ telle que

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}.$$

Exemples :

- La force de gravitation entre une masse m située en O, et une masse m' à une distance r, s'écrit $\vec{F} = -G\dfrac{mm'}{r^2}\vec{e}_r$.
- La force électrostatique entre une charge q située en O, et une charge q' à une distance r, s'écrit $\vec{F} = \dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r$.
- Un ressort attaché en O exerce sur un point M à son autre extrémité (avec $OM = r$) une force $\vec{F} = -k(r - l_0)\vec{e}_r$.

Ces exemples importants justifient que l'on s'intéresse aux propriétés des forces centrales.

I – Conséquences générales pour une force centrale

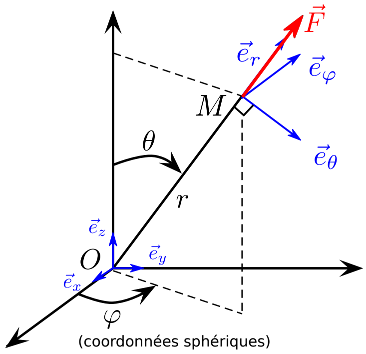
1 – Étude avec le moment cinétique

a/ Conservation du moment cinétique

Propriété : conservation du moment cinétique

Soit un point M, de masse m et vitesse $\vec{v}$, soumis uniquement à une force centrale $\vec{F} = F(r)\,\vec{e}_r$.

- Le moment cinétique en O est constant, $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{\text{cst}}$.



Démonstration :

Coordonnées sphériques de centre O.

Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport au point fixe O :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge F\vec{e}_r = \vec{0}.$$

Ceci a deux conséquences, que nous énonçons ici avant de les démontrer.

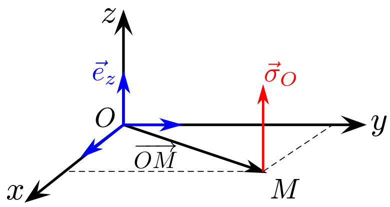
Conséquences de la conservation du moment cinétique

- Le mouvement a lieu dans un plan (celui perpendiculaire à $\vec{\sigma}_O$ et contenant O).
- En coordonnées polaires dans le plan du mouvement, la grandeur $r^2\dot{\theta} = C$ est constante au cours du mouvement.

  On appelle C la “constante des aires”.

  Ceci s'interprète géométriquement en disant que le vecteur position balaie des aires égales pendant des durées égales

b/ Démonstration conséquence 1 : le mouvement est plan

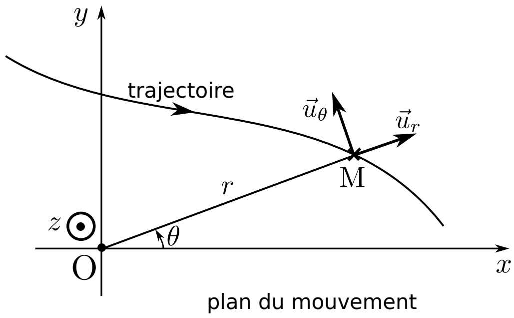


Comme $\vec{\sigma}_O$ est constant, on peut prendre l'axe Oz orienté par $\vec{\sigma}_O$.

Or on sait que (propriété du produit vectoriel) $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$, donc $\overrightarrow{OM}$ reste toujours perpendiculaire $\vec{\sigma}_O$. Donc $\overrightarrow{OM} \perp \vec{e}_z$.

$\rightarrow$ $\overrightarrow{OM}$ reste toujours perpendiculaire à $\vec{e}_z$, c'est-à-dire que le mouvement du point M est toujours contenu dans le plan Oxy.

c/ Démonstration conséquence 2 : la loi des aires



Le mouvement étant dans le plan Oxy, on utilisera dans toute la suite les coordonnées polaires dans ce plan (alors qu'avant on était en coordonnées sphériques).

On note $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ les vecteurs de cette base. On a bien sûr $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{e}_z$.

On a alors $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$, et $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}(r\vec{u}_r)}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

Le moment cinétique s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_O &= \underbrace{r\vec{u}_r}_{\overrightarrow{OM}} \wedge m\underbrace{(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}_{\vec{v}} \\
&= \underbrace{r\vec{u}_r \wedge \dot{r}\vec{u}_r}_{=\vec{0}} + r\vec{u}_r \wedge mr\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\
&= mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z.
\end{aligned}$$

Comme $\vec{\sigma}_O$ est constant, on en déduit que $\boxed{\forall\ t,\ r^2\dot{\theta} = \text{cst.}}$

On note C cette constante, appelée constante des aires. La loi $\forall\ t,\ r^2\dot{\theta} = C$ est appelée la loi des aires.

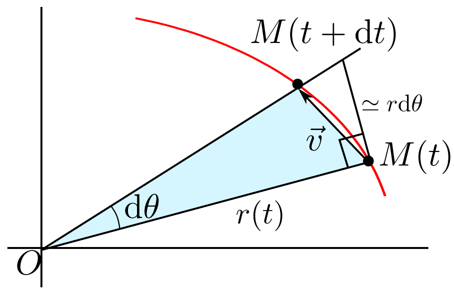
Interprétation géométrique

$r^2\dot\theta = r\times r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = C$, donc pendant un temps dt l'angle θ évolue de dθ, et on a la relation

$$r\times r\mathrm{d}\theta = C\mathrm{d}t.$$

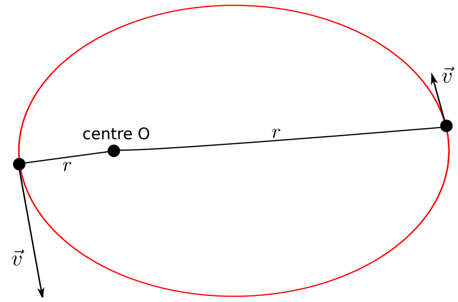
Or on voit que $r\times r\mathrm{d}\theta$ est deux fois l'aire balayée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (l'aire du triangle rectangle ci-contre vaut $r\times r\mathrm{d}\theta/2$, et l'aire non coloriée est d'ordre 2 en dt donc négligeable).

Comme $C=$ cst, cette aire balayée est toujours la même pendant un temps dt constant, où que l'on soit sur la trajectoire.



Interprétation : $r^2\dot\theta$ doit rester constant au cours du mouvement, donc

- si r est petit alors il faut pour compenser une vitesse angulaire plus importante ($\dot\theta$ augmente).
- si r est grand alors la vitesse angulaire sera plus petite ($\dot\theta$ diminue).



—

Bilan des points à connaître jusqu'ici :
– Ce qu'il faut connaître : savoir que le mouvement est plan, que la loi des aires existe (sans connaître par cœur le $r^2\dot\theta$).
– Ce qu'il faut savoir faire : l'**EC1**, à faire pour réviser. Le point le plus important est de savoir redémontrer la loi des aires $r^2\dot\theta=$ cst.

2 – Étude énergétique

a/ Introduction de l'énergie potentielle effective

Écrivons l'énergie mécanique d'une masse m évoluant dans un champ de force centrale.

- Coordonnées polaires dans le plan du mouvement.
- On note $E_p(r)$ l'énergie potentielle dont dérive la force.
- Vitesse $\vec v = \dot r\vec u_r + r\dot\theta\vec u_\theta$, donc $\|\vec v\|^2 = \dot r^2 + (r\dot\theta)^2$.
- On a la loi des aires, $r^2\dot\theta = C$, donc $r\dot\theta = C/r$.
- Énergie mécanique :

$$\begin{aligned}
E_m = E_c + E_p(r) &= \frac12 mv^2 + E_p(r)\\
&= \frac12 m\dot r^2 + \frac12 m(r\dot\theta)^2 + E_p(r)\\
&= \frac12 m\dot r^2 + \frac12 m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)\quad \text{(loi des aires)}\\
&= \frac12 m\dot r^2 + E_{p,\mathrm{eff}}(r)\quad \text{où on définit } E_{p,\mathrm{eff}}(r) = \frac12 m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r).
\end{aligned}$$

Énergie potentielle effective

Pour un mouvement dans un champ de force centrale, on peut écrire l'énergie mécanique de sorte à ce que tout se passe comme si on étudiait un mouvement selon un axe fixe de coordonnée r, avec :

- Une énergie cinétique $\dfrac12 m\dot r^2$,
- Une énergie potentielle $E_{p,\mathrm{eff}}(r) = \dfrac12 m\dfrac{C^2}{r^2} + E_p(r)$.

On parle d'énergie potentielle *effective*, pour dire que tout ce passe comme s'il s'agissait d'une énergie potentielle.

Il ne faut pas connaître les expressions par cœur, mais être capable de refaire ces manipulations.

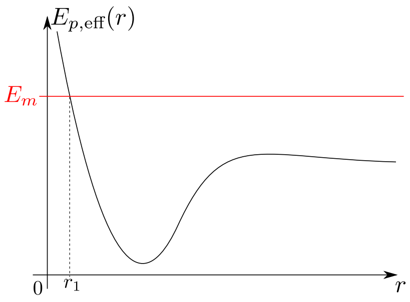
b/ Utilisation pour prédire le type de mouvement

On retrouve ce que nous avons vu au chapitre 3 sur l'énergie : l'énergie mécanique E_m est constante (force conservative), et

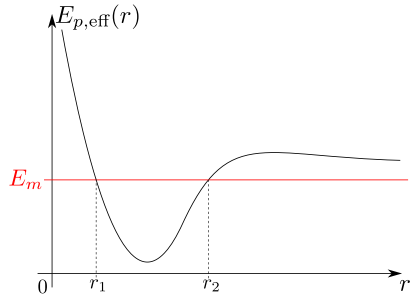
$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\geq 0} + E_{p,\text{eff}}(r), \text{ donc } E_{p,\text{eff}}(r) \leq E_m.$$

Ceci donne le type de mouvement possible, en fonction de la valeur de E_m : cf schéma ci-contre avec une forme arbitraire pour $E_{p,\text{eff}}(r)$.

Ceci sera mobilisé dans la partie suivante.



Zone accessible : $r \geq r_1$
$\Rightarrow$ mouvement ouvert (ou de diffusion).



Zone accessible : $r_1 \leq r \leq r_2$
$\Rightarrow$ mouvement borné.

II – Application aux planètes et satellites

Une force newtonnienne (ou champ de force newtonnien) est une force en $1/r^2$. Elle peut être attractive ou répulsive. Nous nous intéressons ici uniquement au cas gravitationnel, donc attractif.

1 – Rappels sur la loi de Newton

Loi de la gravitation universelle

On se place dans un repère de coordonnées sphériques, de centre O.
Soit une masse m placée en O, et une masse m' placée en M, avec $OM = r$.
La loi de Newton indique que la masse en O exerce sur celle en M une force :

$$\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\vec{e}_r.$$

Cette loi est valable

- en toute rigueur pour des masses m et m' ponctuelles,
- mais aussi si les masse m et m' sont à symétrie sphérique, centrée respectivement en O et en M.

  Cette loi est donc valable pour des planètes et pour tout corps céleste en général, à condition que O et M soient le centre de la planète, de l'étoile, etc.

$G = 6{,}674 \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

Application : Lien avec la pesanteur à la surface d'une planète

Soit une planète de masse M_P et rayon R_P. À sa surface, le poids d'un objet de masse m est $\vec{P} = m\vec{g}$, mais aussi $\vec{P} = -G\frac{mM_P}{R_P^2}\vec{e}_r$.

On en déduit $g = \dfrac{GM_P}{R_P^2}$.

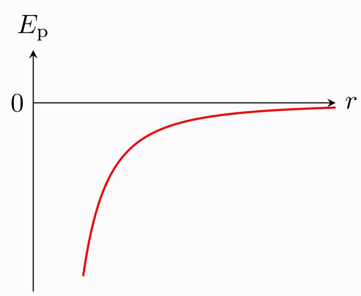
Sur Terre, avec $M_P = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$ et $R_T = 6400\,\text{km}$, on trouve bien $g = 9{,}8\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Énergie potentielle gravitationnelle

L'énergie potentielle dont dérive la force $\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\vec{e}_r$ s'exerçant sur la masse m', est

$$E_p(r) = -G\frac{mm'}{r}.$$

Il faut connaître cette relation.



Démonstration :

Par définition de ce qu'est une énergie potentielle : $F(r) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$.

C'est ce qui a été vu au chapitre 3, dont nous admettons ici la généralisation au cas sphérique avec dépendance en r seulement.

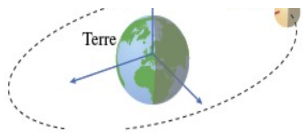
On a donc
$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = G\frac{mm'}{r^2} \quad \text{d'où} \quad E_p(r) = -G\frac{mm'}{r} + \text{cst}.$$
On choisit usuellement la constante nulle, afin d'avoir une énergie potentielle nulle à l'infini.

2 – Référentiels

Un référentiel terrestre est lié à la surface de la Terre.

Dans ce référentiel, la Terre est immobile.

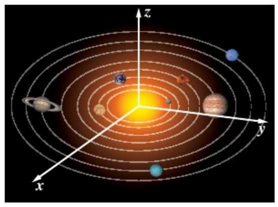
Adapté pour : mouvements des objets sur Terre.



Le référentiel géocentrique :
- son centre est le centre de la Terre,
- ses trois axes pointent vers des étoiles lointaines (fixes).

Dans ce référentiel, la Terre tourne sur elle-même, mais n'a pas de mouvement de translation.

Adapté pour : mouvement de la Lune ou des satellites.



Le référentiel héliocentrique :
- son centre est le centre du Soleil,
- ses trois axes pointent vers des étoiles lointaines (fixes).

Dans ce référentiel, les planètes décrivent des trajectoires quasi-circulaires.

Adapté pour : mouvements des planètes, des comètes.

Variante : référentiel de Copernic, idem mais centré sur le centre de masse du système solaire

3 – Nature des trajectoires

– L'énergie potentielle effective (cf I.2) est : $E_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{1}{2}m'\dfrac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \dfrac{1}{2}m'\dfrac{C^2}{r^2} - G\dfrac{mm'}{r}$.
  L'allure de $E_{p,\text{eff}}(r)$ est montrée ci-dessous.

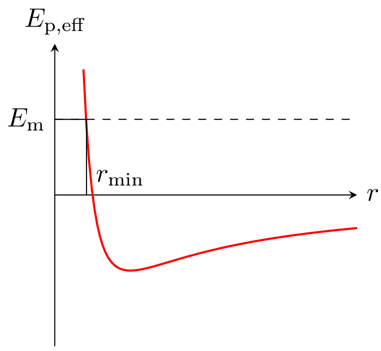
– $\Rightarrow$ Le type de mouvement va donc dépendre de la valeur de l'énergie mécanique (qui se conserve) de la masse m'.
  Initialement $E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}mv_0^2 - G\dfrac{mm'}{r_0}$, ce qui peut être positif ou négatif.

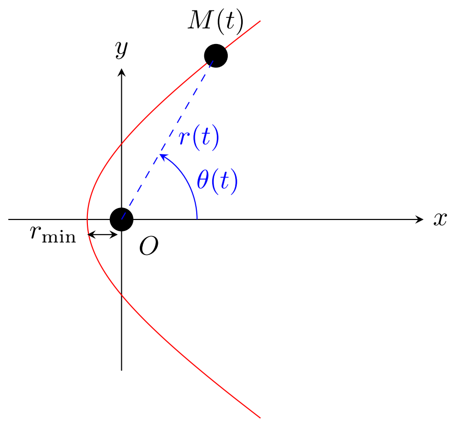
Ainsi trois cas :

▶ $E_m > 0$:

r peut tendre vers l'infini, c'est un état non borné, **état de diffusion**.

(On peut démontrer que les trajectoires sont des hyperboles.)

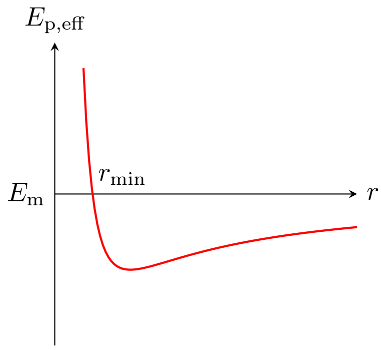


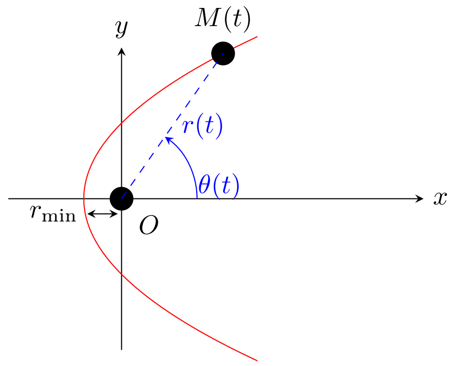


▶ $E_m = 0$:

r peut tendre vers l'infini, c'est un état non borné, **état de diffusion**.

(On peut démontrer que les trajectoires sont des paraboles.)

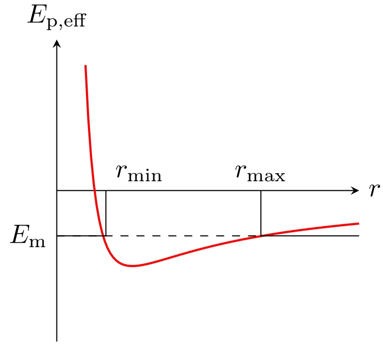


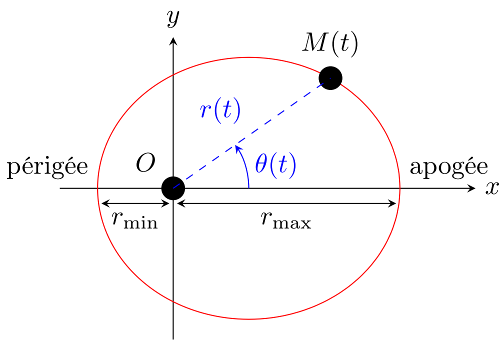


- $E_m < 0$:

  r est borné entre deux valeurs, c'est un **état lié**.

  (On peut démontrer que les trajectoires sont des ellipses.)





Dans la suite, nous nous intéressons uniquement aux cas des trajectoires bornées.

4 – Lois de Kepler

Les trois lois de Kepler

Ces lois sont valables dans le référentiel héliocentrique ou de Copernic.

- Loi 1 (loi des orbites) : les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers.
- Loi 2 (loi des aires) : les aires balayées par la ligne Soleil-planète pendant des intervalles de temps égaux sont égales.
- Loi 3 (loi des périodes) : le carré de la période de révolution autour du Soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe de son ellipse, soit :
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \text{cst},$$
  avec M_S la masse du Soleil. Ceci est indépendant de la masse de la planète.

Ces lois se transposent au cas d'un satellite en orbite autour d'une planète : il faut alors se placer dans le référentiel lié au centre de la planète (géocentrique s'il s'agit de la Terre), et remplacer le Soleil par la planète. En particulier M_S devient la masse de la planète.

Il faut savoir énoncer ces trois lois (mais pas la relation exacte pour la 3e).

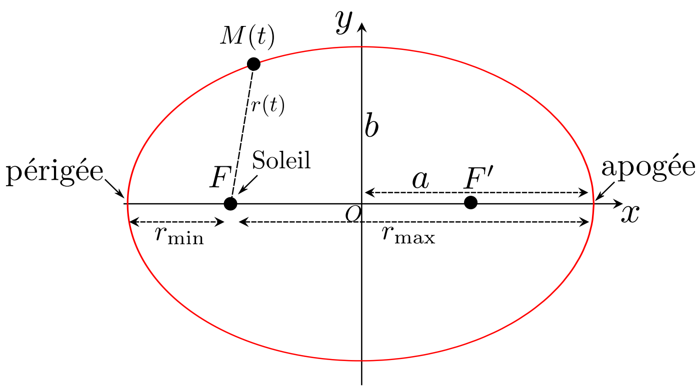
Remarque : Les lois de Kepler sont valables pour tout corps en orbite autour d'un autre objet massif, à condition de ne prendre en compte que la force de gravitation entre ce corps et l'objet central. Il y a donc en réalité de faibles écarts, dû au fait que les planètes interagissent entre elles.

⋆ Illustration de la loi 1 (et propriétés des ellipses) :

Quelques notions sur les ellipses :

– Une ellipse possède un grand axe (longueur $2a$) et un petit axe (longueur $2b$), cf ci-contre.

– Dans le repère ci-contre, l'équation cartésienne de l'ellipse est
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
Si $a = b$, on retrouve un cercle de rayon $R = a = b$, et son équation est bien $x^2 + y^2 = R^2$.



– L'excentricité est $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, et on a $0 \leq e \leq 1$.
Plus l'ellipse est proche du cercle, plus $e \to 0$ (et si $e = 0$ alors $a = b$, on a un cercle).
Plus l'ellipse est aplatie, plus $e \to 1$ (et si $e = 1$ alors $b = 0$, on a un segment).

– Une ellipse possède deux foyers, F et F' ci-contre.
Si $a = b$, alors F et F' sont confondus en O.

– Le point où la planète est au plus proche du Soleil est le périgée (péri = proche), le point le plus éloigné est l'apogée.
On a $r_{\text{max}} - r_{\text{min}} = 2ae$.

Aucune des formules ci-dessus n'est à connaître ! Retenez simplement le vocabulaire, et soyez capable de refaire un schéma d'ellipse.

Dans le système solaire (les chiffres ne sont pas à retenir) :

- Les trajectoires des planètes ont des excentricités faibles : $e = 0{,}21$ pour Mercure, 0,0086 pour Vénus, 0,017 pour la Terre, 0,093 pour Mars, etc.

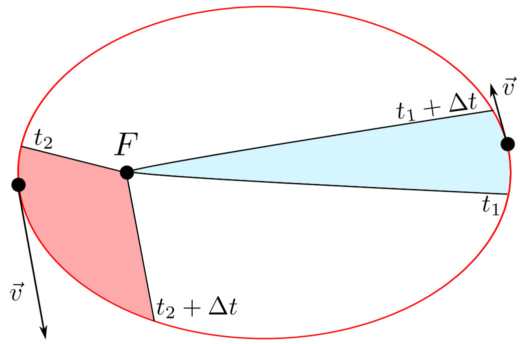
  Animation permettant de visualiser les trajectoires : https://javalab.org/en/keplers_law_en/
- En revanche les comètes ont des excentricités proches de 1 (comète de Halley : $e = 0{,}97$).
- Les satellites artificiels (de télécommunication, etc.) peuvent avoir des orbites quasi-circulaire ($e \simeq 0$) ou au contraire très elliptiques, selon les besoins.

Enfin, il est possible de démontrer cette loi 1 via un PFD sur un corps soumis à une force en $1/r^2\vec{e}_r$, mais c'est un peu mathématique et nous ne le faisons pas.

⋆ Illustration de la loi 2 :

- En un temps Δt donné (par exemple 24 h), l'aire balayée par le segment Soleil-planète est toujours la même.

  Ci-contre, l'aire en rouge et l'aire en bleu sont les mêmes.
- Conséquence : les planètes vont plus vite lorsqu'elles sont proches du Soleil (à la fois en vitesse angulaire et en vitesse absolue), et plus doucement lorsqu'elles en sont loin.
- Nous avons démontré cette loi dans le I.1.c, via la conservation de $r^2\dot{\theta}$.



⋆ Illustration de la loi 3 :

- Plus un objet est éloigné du corps central, plus sa période de révolution est longue.

  Période de révolution la Terre autour du Soleil : un an ; de Neptune : 164,8 ans (Neptune a fait à peine plus d'un tour depuis sa découverte en 1846 !).

  Période de révolution autour de la Terre de la station spatiale internationale (ISS, 400 km d'altitude) : 1h32 ; d'un satellite géostationnaire (36 000 km d'altitude) : 24 h ; de la Lune (384 400 km de distance) : 27 jours.
- On peut démontrer cette loi (encore à partir du PFD sur un corps soumis à une force en $1/r^2\vec{e}_r$), mais c'est assez mathématique. Nous le ferons dans la suite dans le cas plus simple où l'orbite est circulaire.

5 – Étude d'un satellite en orbite circulaire

a/ Particularités de l'orbite circulaire

→ Faire l'**EC2** (avec vidéo).

Bilan de l'EC2 :

Particularité du mouvement circulaire d'un satellite

- ▶ Une orbite circulaire est nécessairement parcourue avec une vitesse uniforme ($\|\vec{v}\| = \text{cst}$, soit aussi $\dot{\theta} = \text{cst}$).
- ▶ On peut facilement exprimer la période du mouvement et ainsi retrouver la 3$^{\text{e}}$ loi de Kepler (pour cela, appliquer un pfd pour trouver v).
- ▶ On peut en déduire la vitesse d'un satellite en orbite basse, pour laquelle $R \simeq R_T$. Elle est de l'ordre de 8 km/s. On l'appelle 1$^{\text{re}}$ vitesse cosmique, et c'est la vitesse à communiquer à un objet pour le satelliser. (exemple : l'ISS)
- ▶ L'énergie mécanique se met sous une forme simple (il suffit d'utiliser l'expression de la vitesse).

Remarque : Les orbites basses sont très utilisées, leurs avantages étant une communication rapide et une bonne résolution pour les instruments d'observation.
Cependant les orbites d'altitudes inférieures à 200 km environ sont inutilisables à cause des frottements avec l'atmosphère.

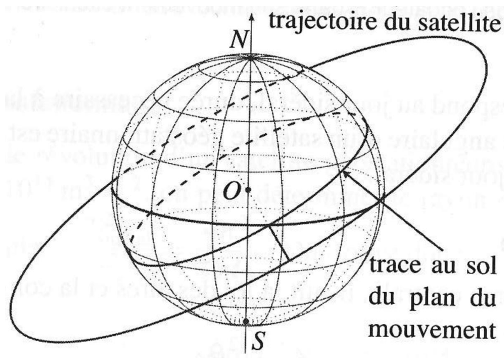
b/ Cas d'un satellite géostationnaire

Certains satellites de communication doivent toujours être positionné au même endroit du ciel à partir d'un point terrestre (par exemple certaines antennes paraboliques pointent toujours dans la même direction). Ces satellites sont dits **géostationnaires** (ils "stationnent" par rapport à la Terre - "géo") .

On a montré dans le I que la trajectoire est dans un plan qui passe par le centre O de la Terre.

On voit donc que pour un satellite géostationnaire, il est nécessaire que l'orbite soit dans le plan de l'équateur (pas comme sur le schéma ci-contre !), circulaire, et avec une période égale à celle de rotation de la Terre sur elle-même (donc $\simeq 24\,\text{h}$).

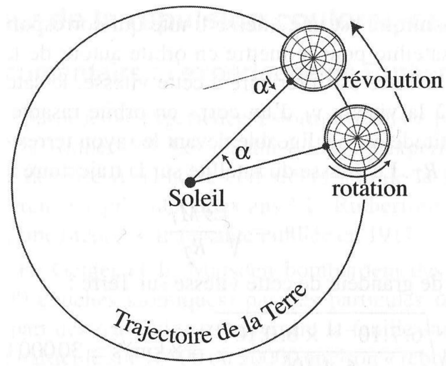
$\rightarrow$ Faire l'**EC3** (sauf la question 1 déjà faite ici, et pour la 2 reprendre les résultats de l'EC précédent) (avec vidéo).



Bilan : l'altitude d'un satellite géostationnaire est d'environ $36\,000\,\text{km}$.

Ce type d'orbite est très prisé (on y trouve plus de 300 satellites), et très surveillé.

> **Remarque :** (hors programme) Dans le référentiel géocentrique (ou héliocentrique), la Terre ne tourne pas sur elle-même en $24\,\text{h}$. Il lui faut $23\,\text{h}$ et $56\,\text{min}$ pour effectuer un tour complet sur elle-même.
>
> Pour être plus précis, $24\,\text{h}$ est le temps mis pour que le Soleil revienne à la même position dans le ciel (on parle de jour solaire). Mais entre-temps la Terre a un peu avancé sur son orbite, et il faut donc – pour quelle soit à nouveau face au Soleil – qu'elle fasse un peu plus d'un tour sur elle-même : on voit sur le schéma ci-contre qu'elle a tourné de $2\pi + \alpha$.
>
> Ainsi, un tour de 2π (ce qui correspond à un retour à la même position des étoiles lointaines) correspond à un peu moins de $24\,\text{h}$. On parle de jour sidéral. Un jour sidéral dure $24\,\text{h} \times \dfrac{2\pi}{2\pi + \alpha}$ avec $365{,}25\alpha = 2\pi$, donc on obtient bien $23\,\text{h}$ et 56 minutes.



6 – Vitesse de libération

On se place à la surface de la Terre, et on lance des satellites avec des vitesses initiales v_0 de plus en plus élevées.

- Pour $v_0 < 8\,\text{km/s}$, le satellite retombe par terre. ($8\,\text{km/s}$ est la vitesse en orbite basse)
- Pour $v_0 > 8\,\text{km/s}$, le satellite décrit une orbite périodique.
- Pour v_0 encore plus grand, on s'attend à ce que le satellite s'éloigne sans cesse de la Terre sans jamais revenir (donc que son mouvement soit un état de diffusion).

  Soit v_l la vitesse à partir de laquelle ceci se produit. On l'appelle **vitesse de libération**, ou seconde vitesse cosmique.

Que vaut cette vitesse ?

Faire l'**EC4** pour le découvrir ! (avec vidéo)