Mécanique
Chapitre 3

Correction – TD – Énergie en mécanique

I Exemples rapides

1 - Prenons un axe z vers le haut, avec $z = 0$ au départ. L'énergie mécanique est $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgz$, conservée car toutes les forces (le poids ici) sont conservatives.

Initialement $E_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2$, et pour l'altitude maximale on a $v = 0$ et $z = z_{\max}$, d'où $E_m = mgz_{\max}$.

Par conservation de l'énergie mécanique on a donc $\dfrac{1}{2}mv_0^2 = mgz_{\max}$, d'où

$$z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

2 - L'énergie mécanique est $E_m = \dfrac{1}{2}m(l\dot{theta})^2 - mgl\cos\theta$, conservée car toutes les forces qui travaillent sont conservatives (le poids l'est, la tension du fil ne travaille pas).

Initialement $\theta_0 = 0$ et $v = v_0$, et donc $E_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2 - mgl$. Au moment d'amplitude maximale, $\theta = \theta_m$ et $v = 0$, donc $E_m = -mgl\cos\theta_m$.

Par conservation de l'énergie mécanique on a donc $\dfrac{1}{2}mv_0^2 - mgl = -mgl\cos\theta_m$, d'où

$$\cos\theta_m = 1 - \frac{v_0^2}{2gl}.$$

3 - Soit $E = 500\,\mathrm{Wh} = 500 \times 3600\,\mathrm{J} = 1{,}8 \times 10^6\,\mathrm{J}$.

On a au maximum (en négligeant tout frottement et autres pertes) : $mgz = E$, d'où $z = \dfrac{E}{mg} = 1800\,\mathrm{m}$.

II Système masse-ressort vertical avec le TEM

1 - $\star E_c = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$.

Pour l'énergie potentielle, il y a deux forces :

$$E_p = E_{p,\text{pesanteur}} + E_{p,\text{ressort}} = -mgx + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2.$$

En effet, l'axe x est vers le bas, d'où un signe moins pour $E_{p,\text{pesanteur}}$. Et pour $E_{p,\text{ressort}}$, la longueur l du ressort est x.

On a donc

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2.}$$

$\star$Pour obtenir l'équation du mouvement, on utilise le fait qu'ici toutes les forces sont conservatives, donc

E_m est une constante. Donc $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m\,\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}t} - mg\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 - 2l_0x + l_0^2) = 0\\
&\frac{1}{2}m\,2\dot{x}\ddot{x} - mg\dot{x} + \frac{1}{2}k(2x\dot{x} - 2l_0\dot{x}) = 0\\
&m\dot{x}\ddot{x} - mg\dot{x} + k(x\dot{x} - l_0\dot{x}) = 0\\
&m\ddot{x} - mg + k(x - l_0) = 0\\
&\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{kl_0}{m} + g}
\end{aligned}$$

2 - À l'équilibre on a $\ddot{x} = 0$, donc avec l'équation précédente il reste :

$$0 + \frac{k}{m}x_{\text{éq}} = \frac{kl_0}{m} + g, \quad \text{soit} \quad \boxed{x_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}.}$$

Remarque : on peut aussi utiliser le fait qu'à l'équilibre, la somme des forces est nulle.

3 - On pose $\omega_0^2 = k/m$.

Solution homogène : $x_H(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$.

Solution particulière constante, donc $0 + \dfrac{k}{m}x_P = \dfrac{kl_0}{m} + g$, soit donc $x_P = l_0 + \dfrac{mg}{k} = x_{\text{éq}}$.

Solution complète : $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{\text{éq}}$.

CI1 : $x(0) = x_{\text{éq}} + \delta$, d'où $A = \delta$.

CI2 : $\dot{x} = 0$, ce qui se traduit par $B\omega_0 = 0$ et donc $B = 0$.

Finalement : $\boxed{x(t) = \delta\cos\omega_0 t + x_{\text{éq}}.}$

III Chute sur corde en escalade

1 - La vitesse maximale est atteinte au point 2.

Système {grimpeur+corde}. Bilan des forces entre 1 et 2 : uniquement le poids. C'est une force conservative ($E_p = mgz$) et donc l'énergie mécanique se conserve.

– Au point 1, l'énergie mécanique du grimpeur est $E_{m1} = E_c + E_p = mgh$.

– Au point 2, elle devient $E_{m2} = \dfrac{1}{2}mv_2^2$.

On a donc $mgh = \dfrac{1}{2}mv_2^2$, d'où $\boxed{v = \sqrt{2gh} = 1.0 \times 10\,\mathrm{m/s}.}$

2 - Système {grimpeur+corde}. Entre 1 et 2 seul le poids intervient, mais entre 2 et 3 la corde se tend et il faut ajouter l'énergie potentielle élastique $E_p = \dfrac{1}{2}k\Delta l^2$ avec Δl l'allongement de la corde.

Bilan entre les instants 1 et 3 :

– En 1, $E_{m1} = E_c + E_p = mgh$.

– En 3, vitesse nulle et $E_{m3} = \dfrac{1}{2}k\Delta l^2 + mg(-\Delta l)$.

On a donc :

$$mgh = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + mg(-\Delta l), \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta l^2 - \frac{2mg}{k}\Delta l - \frac{mgh}{k} = 0.}$$

En négligeant l'avant dernier terme devant le dernier (car $\Delta l \ll h$), on obtient $\boxed{\Delta l = \sqrt{\dfrac{2mgh}{k}}.}$

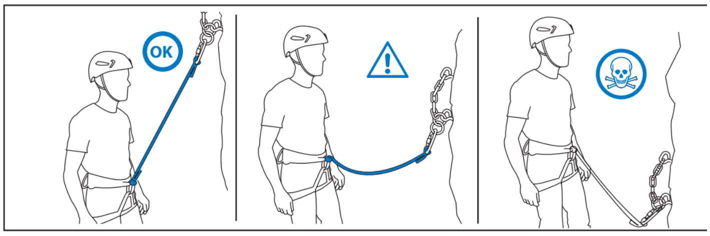
3 - La force exercée est, en norme : $F_{\max} = k\Delta l = \sqrt{2mgh\,k} = \sqrt{2mgh\,\dfrac{\alpha}{L_0}}$,

$$\text{soit} \qquad \boxed{F_{\max} = \sqrt{2mg\alpha\, f}.}$$

On a $\boxed{F_{\max} = \sqrt{2\times 100\times 10\times 5\times 10^4\times 1} = 10\,\text{kN},}$ ce qui est inférieure à la limite de 12 kN.

4 - $f = 1/0.5 = 2$ dans le premier cas, $f = 4/8 = 0.5$ dans le second. Le premier cas est donc plus dangereux car $F_{\max}$ est en $\sqrt{f}$, donc deux fois plus importante dans le cas 1.

Remarque : la situation d'une chute de 1 m sur une corde de 0,5 m correspond à la situation de droite ci-dessous (extrait d'une longe d'escalade) :



IV Record de saut à la perche

Il faut faire un bilan d'énergie mécanique entre l'instant A "course d'élan" et l'instant C "sommet du saut".
Il y a deux énergies potentielles : celle de pesanteur, $E_{p,\text{pes}} = mgz$ avec z un axe vers le haut, et $E_{p,\text{élast}}$ l'énergie potentielle élastique de la perche, qui est nulle dans les étapes A et C car la perche n'est pas contractée ou pliée.
On a ainsi $E_{m,A} = E_{c,\max} = \dfrac{1}{2}mv_{\max}^2$ avec $v_{\max}$ la vitesse de course de l'athlète.
Et $E_{m,C} = mgh$ avec h la hauteur du saut (pas d'énergie cinétique car sauteur au sommet de la trajectoire).
On néglige tout frottement, le mouvement est donc conservatif et on a $E_{m,C} = E_{m,A}$, d'où $\dfrac{1}{2}mv_{\max}^2 = mgh$, d'où

$$h = \frac{v_{\max}^2}{2g} = 5{,}1\,\text{m}.$$

On trouve ainsi une hauteur légèrement inférieure à la hauteur du record de Renaud Lavillenie. La raison est que notre raisonnement s'applique pour un point matériel, ou en fait pour le centre de masse du sauteur. Or le centre de masse est déjà situé à une certaine hauteur par rapport au niveau du sol, d'où un résultat légèrement plus élevé. Il faut également ajouter que le sauteur pousse sur ses bras lors du mouvement ascendant : il produit ainsi un travail qui vient augmenter son énergie totale.

Enfin, notre raisonnement montre que la hauteur maximale ne dépend pas de la perche utilisée, et en particulier pas de sa hauteur. La perche sert "seulement" à convertir l'énergie cinétique du sauteur en mouvement ascendant, puis donc en énergie potentielle de pesanteur.

Un reportage avec explications physiques : https://www.youtube.com/watch?v=GqAOSM6QW2c

V Skieur

1 - Le mouvement n'est pas conservatif car la force de frottement ne l'est pas.

2 - Système {skieur}, bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- Réaction normale $\vec{N} = N\vec{e}_{z'}$ avec $N \geq 0$.
- Réaction tangentielle $\vec{T} = -T\vec{e}_{x'}$ avec $T \geq 0$ et $T = fN$.

PFD au même système (on suppose le référentiel galiléen) :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}.$$

Or ici $\vec{a} = \ddot{x}'\vec{e}_{x'}$, d'où l'intérêt d'utiliser la base $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{z'}$ et de projeter sur $\vec{e}_{z'}$:

$$m\vec{a}\cdot\vec{e}_{z'} = \vec{P}\cdot\vec{e}_{z'} + \vec{N}\cdot\vec{e}_{z'} + \vec{T}\cdot\vec{e}_{z'},$$

$$0 = -mg\cos\alpha + N + 0,$$

d'où $N = mg\cos\alpha$, puis via la loi de Coulomb :

$$\boxed{T = fN = fmg\cos\alpha, \quad \text{et} \quad \vec{T} = fN = fmg\cos\alpha\,\vec{e}'_x.}$$

3 - On applique le théorème de l'énergie mécanique entre A et B, en prenant garde à considérer les forces de frottement non conservatives :

$$E_{m,B} - E_{m,A} = W_{AB}(\vec{T})$$

(la composante $\vec{N}$ ne travaille pas).

Calculons :

$$W_{AB}(\vec{T}) = \int_A^B \vec{T}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_A^B -T\vec{e}_{x'}\cdot\mathrm{d}x'\vec{e}_{x'} = -T\int_A^B \mathrm{d}x' = -T\times AB.$$

Or $T = fmg\cos\alpha$, $AB = H/\sin\alpha$, donc

$$W_{AB}(\vec{T}) = -\frac{fmgH\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{fmgH}{\tan\alpha}.$$

Enfin, $E_{m,B} = \dfrac{1}{2}mv_B^2$ et $E_{m,A} = mgH$, d'où

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_B^2 = mgH - mgH\,\frac{f}{\tan\alpha} = mgH\left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right).}$$

On a $\dfrac{f}{\tan\alpha} = 26\%$, ce qui donne la part d'énergie mécanique perdue par frottements.

On peut ensuite faire l'AN pour v_B.

4 - L'altitude maximale qu'il peut atteindre est donnée par la conservation de l'énergie mécanique, entre B et un point C d'altitude z_C et de vitesse nulle. On a alors $mgz_C = E_{m,B}$.

Si la vitesse en C est nulle, c'est que la trajectoire est exactement verticale. Cela posera des problèmes à la réception !

VI Franchissement d'une barrière de potentiel

VII Piégeage d'un électron

1 - Il s'agit d'une sorte de parabole orientée vers le haut. Cela forme un puits de potentiel, le type de mouvement possible est donc périodique et borné.

La position d'équilibre est à l'endroit où $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = 0$, or $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = \dfrac{eV_0}{d^2}z + 4\alpha z^3$, donc la position d'équilibre est en $z = 0$.

Sa stabilité est donnée par le signe de $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2}(z=0) = \dfrac{eV_0}{d^2} > 0$, donc elle est stable.

(On pouvait aussi raisonner sans calcul, uniquement avec le graphique.)

2 - On écrit que $E_p \simeq \dfrac{1}{2}m\dot{z}^2$ (approximation harmonique).

$E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{z}^2 + \dfrac{eV_0}{2d^2}z^2$ est une constante car le mouvement est conservatif.

On dérive par rapport au temps, pour obtenir après simplification que $\dfrac{1}{2}m\,2\dot{z}\ddot{z} + \dfrac{eV_0}{2d^2}2\dot{z}\,z = 0$, soit donc

$$\ddot{z} + \frac{eV_0}{md^2}z = 0.$$

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{eV_0}{md^2}}$, et donc de fréquence $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{eV_0}{md^2}}$.