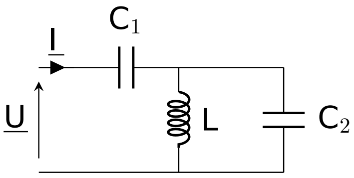
Étude des systèmes linéaires
Chapitre 4

TD – Régime sinusoïdal forcé

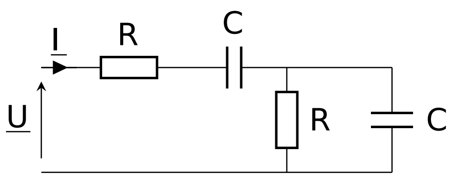
I Impédances équivalentes ★ | [● ○ ○]

Suite de l'EC2. Donner l'expression de l'impédance équivalente à chaque association de dipôles.

1 -



2 -



II Suite de l'EC6 : caractéristiques de la résonance en intensité du RLC série [● ● ○]

On reprend l'étude de l'EC 6. On a montré que l'amplitude complexe du courant $i(t)$ est :

$$\underline{I}_0 = \frac{E_0/R}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}.$$

1. En déduire l'expression de la différence de phase $\Delta\varphi$ entre l'intensité et la tension d'alimentation en fonction de x.

   Donner l'allure de la courbe associée en déterminant la valeur de $\Delta\varphi$ en hautes fréquences, en basses fréquences et à la résonance.

2. La bande passante $\Delta\omega$ est définie comme $|\omega_{c1} - \omega_{c2}|$, ces pulsations étant les pulsations de coupures, pour lesquelles l'amplitude est divisée par $\sqrt{2}$ par rapport à sa valeur maximale. Établir l'expression de $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et Q.

   Comment varie-t-elle lorsque Q augmente ?

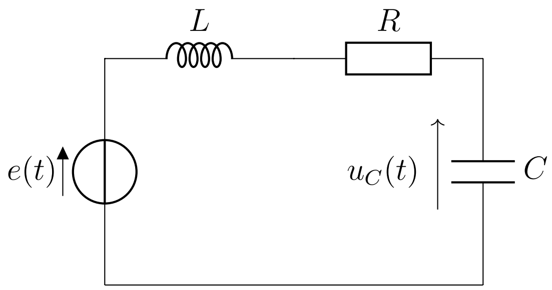
3. L'acuité de la résonance est définie comme $A_c = \dfrac{\omega_r}{\Delta\omega}$, avec ω_r la pulsation à la résonance.

   Donner son expression en fonction du facteur de qualité. Quelle est l'influence du facteur de qualité sur l'acuité de la résonance en intensité ?

   Représenter I_0 en fonction de la pulsation pour différentes valeurs de Q.

III Résonance en tension du circuit RLC série ★ | [● ○ ○]

On étudie le circuit ci-contre. Le générateur idéal de tension délivre une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.



1 - On cherche $u_c(t)$ sous la forme $u_c(t) = U_{C0}\,\cos(\omega t + \varphi)$.

Par quelle expression complexe ce signal est-il représenté ?

2 - Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U}_{C0}$ de u_c en fonction de R, L, C, E_0 et ω.

Écrire ensuite cette expression sous la forme canonique $\underline{U}_{C0} = \dfrac{E_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}}$, en introduisant la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q, et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R, L et C.

3 - En déduire l'expression de l'amplitude U_{C0} de $u_C(t)$ en fonction de x.

Quelle est sa valeur en $\omega = 0$? En ω_0 ? En $+\infty$?

((+)Faire une étude afin de déterminer s'il y a existence d'une résonance. On établira l'expression de la position ω_r de cette résonance. Quelle est alors la valeur de la tension ?)

Tracer l'allure de la courbe $U_{C0} = f(x)$ dans le cas où il y a résonance et dans le cas où il n'y a pas résonance.

4 - En déduire également l'expression de la différence de phase $\Delta\varphi$ entre $u_C(t)$ et la tension d'alimentation en fonction de x.

Donner l'allure de la courbe en déterminant la valeur de $\Delta\varphi$ en hautes fréquences, en basses fréquences et en $x = 1$.

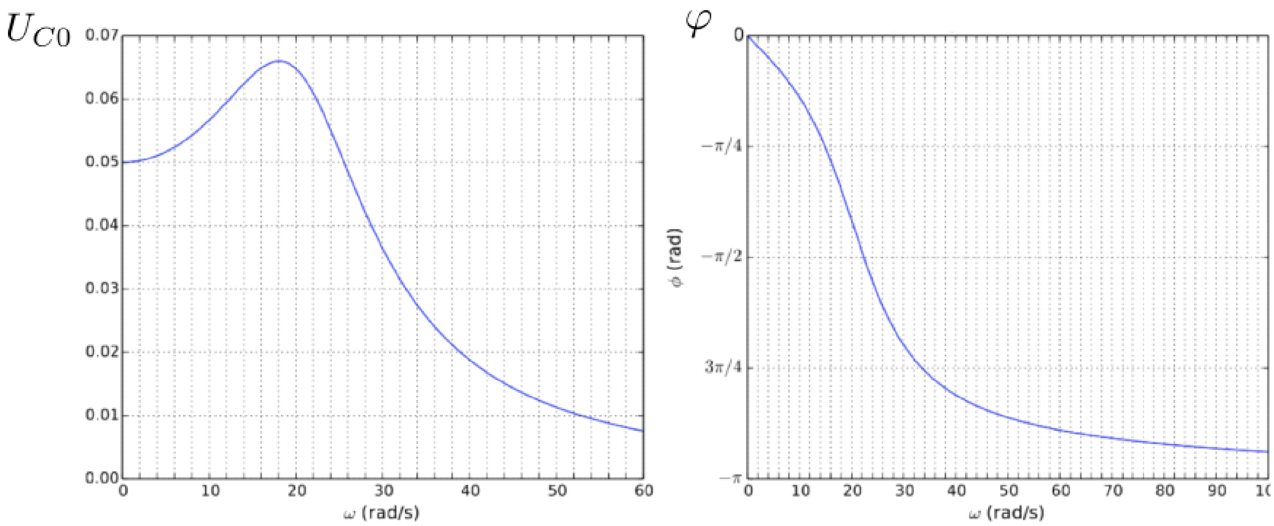
5 - (+) À partir de quelle valeur du facteur de qualité la pulsation de résonance et la pulsation propre sont-elles proches à moins de 1% ?

IV Étude de graphes d'amplitude et de phase ——— ⋆ | [● ○ ○]

On étudie un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé. On s'intéresse dans le cas a/ ci-dessous à la tension aux bornes du condensateur. On réalise une acquisition de l'amplitude de cette tension et du déphasage entre cette tension et celle du générateur.

1 - À l'aide des graphiques et des résultats de la partie "annexe" du cours, estimer les valeurs de la pulsation propre et de la pulsation de résonance du circuit, ainsi que celle du facteur de qualité.

a/



On change ensuite les paramètres du circuit. On s'intéresse cette fois au suivi du courant : cas b/ ci-dessous.

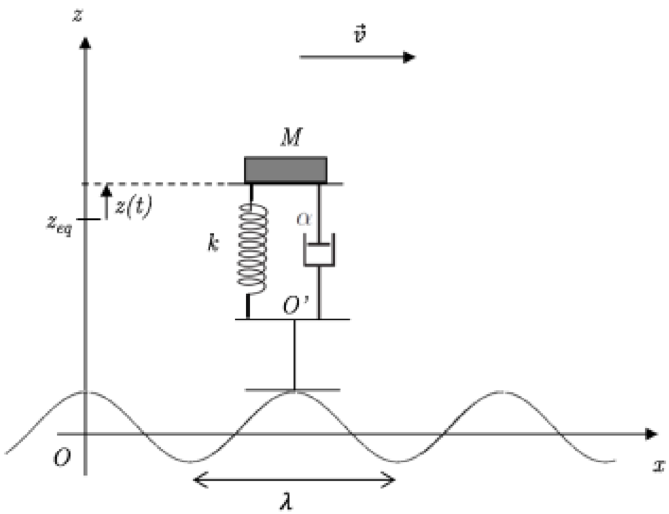
2 - Toujours à l'aide de l'annexe du cours, déterminer les valeurs de la fréquence propre, de la fréquence de résonance, et du facteur de qualité.

b/

V Skieur face à un mur de bosses [• • ○]

Cet exercice s'intéresse à un skieur qui dévale une piste de bosses. On se pose la question de la vitesse à choisir pour subir le moins possibles les oscillations de la piste.

On modélise le skieur et ses skis le plus simplement possible : une masse m pour le torse, en contact avec le sol via un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, et un amortisseur de coefficient d'amortissement α pour l'ensemble jambes+skis, en contact ponctuel avec la neige (cf schéma ci-contre).



Le skieur se déplace à une vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$, sur une piste dont le profil impose à O' de suivre une côte $z_{O'} = L + h(t)$ avec $h(t) = E_m \cos\left(\dfrac{2\pi x(t)}{\lambda}\right)$, $x(t)$ étant l'abscisse du point O'.

On note $z_{\text{éq}}$ l'altitude du skieur lorsqu'il est à l'équilibre (skieur immobile au repos, pas de bosses donc $h(t) = 0$).

Le mouvement vertical du skieur est repéré par la côte $z(t)$, qui est la différence la position du skieur et sa position $z_{\text{éq}}$ lorsqu'il est à l'équilibre.

Enfin, la force exercée par l'amortisseur s'écrit $\vec{F} = -\alpha(\dot{z}(t) - \dot{z}_{O'}(t))\vec{e}_z$.

1 - Donner l'expression de $x(t)$ en supposant que O' se trouve à la verticale de O à l'instant initial. En déduire l'expression de la pulsation ω du forçage du système en fonction de λ et de v.

On conservera la notation ω dans ce qui suit.

2 - Faire un bilan des forces s'exerçant sur la masse, et exprimer chaque force en fonction de $\vec{e}_z$ et des paramètres du problème (dont $z(t)$ et sa dérivée, L, $h(t)$ et sa dérivée, k, l_0, α, $z_{\text{éq}}$).

3 - On s'intéresse à la position d'équilibre. Montrer que $z_{\text{éq}}$ vérifie $-k(z_{\text{éq}} - L - l_0) - mg = 0$.

4 - Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$.

On admet qu'elle se met sous la forme $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z(t) = \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{h} + \omega_0^2 h(t)$.

((+) Le montrer, et prouver que $Q = \sqrt{km}\alpha$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.)

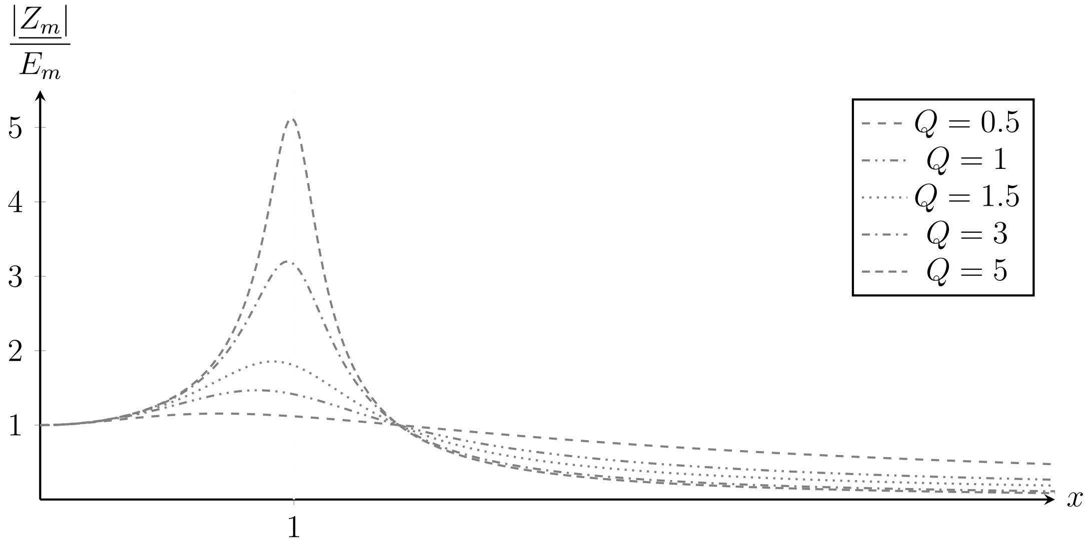
5 - On notera $\underline{Z}_m$ l'amplitude complexe associée à $z(t)$.

Donner la forme du signal complexe associé à $z(t)$. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z}_m$. Montrer ensuite que l'amplitude Z_m des oscillations verticales du skieur est donnée par la relation

$$Z_m = \frac{\sqrt{1 + x^2/Q^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}}\, E_m$$

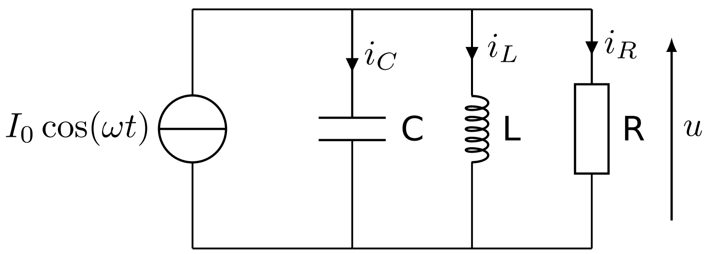
avec $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite.

6 - Le graphique ci-dessous montre l'évolution du rapport Z_m/E_m en fonction de x pour plusieurs valeurs de Q. Quelles sont alors les solutions pour réussir à descendre la piste sans trop de peine ?



VI (+) Antenne émettrice [• • ○]

L'antenne d'un émetteur radio peut être modélisée par un circuit électrique équivalent composé de l'association en parallèle d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. L'antenne est alimentée par une source idéale de courant dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension $u(t)$ aux bornes de l'antenne, qui correspond au signal envoyé, dépend de ω.



1 - Déterminer l'impédance complexe de l'association équivalente à l'antenne.

2 - En déduire l'amplitude complexe de la tension u en fonction de ω, I_0 et des valeurs des composants.

3 - Pour quelle pulsation l'amplitude U de u prend-elle sa valeur maximale notée $U_{\max}$? Conclure sur la fréquence à utiliser.

4 - Représenter le graphe donnant U en fonction de la pulsation réduite x que l'on définira.

5 - On se place dans le cas $R = 37\,\Omega$, $L = 1{,}2 \times 10^{-8}\,\mathrm{H}$ et $C = 2{,}3 \times 10^{-10}\,\mathrm{F}$.

Caractériser quantitativement l'acuité $A_c = \omega_0/\Delta\omega$ de la résonance (donner son expression et sa valeur). Interpréter sa dépendance en R.

6 - Quel est le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$? Comment varie-t-il avec la pulsation réduite ?