Partie I : Électronique
Rappels de 1re année

Systèmes linéaires

Ce document résume les points essentiels du programme de 1re année concernant les les systèmes linéaires (en régime transitoire, ou forcé par un signal harmonique ou périodique). Il ne contient certainement pas tout, et votre cours de 1re année reste donc précieux.
Travail à faire : une semaine avant la rentrée, lire le document, et à l'aide du document et de votre cours de 1re année répondre aux questions notées par des flèches $\rightsquigarrow$.

I Introduction et définitions

I.1 Définitions

Considérons un système qui à une entrée $e(t)$ associe une sortie $s(t)$. On notera : $e(t) \xrightarrow{\text{sys}} s(t)$.
Le système est linéaire invariant si :

- Linéaire : si on a $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$ et $e_2(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_2(t)$, alors on aura aussi : $e_1(t) + e_2(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t) + s_2(t)$, et on aura également $k\, e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} k\, s_1(t)$ pour tout réel k.
- Invariant : si les propriétés du système restent inchangées dans le temps. Si lors d'une expérience on a $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$, alors on aura encore $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$ si l'on vient refaire l'expérience plus tard.

$\rightsquigarrow_1$ Les circuits électroniques composés de résistances, de bobines et de condensateurs sont linéaires. À votre avis, pourquoi ?

$\rightsquigarrow_2$ Quel exemple de composant peut faire qu'un système électronique n'est pas linéaire ?

$\rightsquigarrow_3$ Qu'est-ce qui peut faire qu'un circuit électronique ne constitue pas un système invariant dans le temps ?

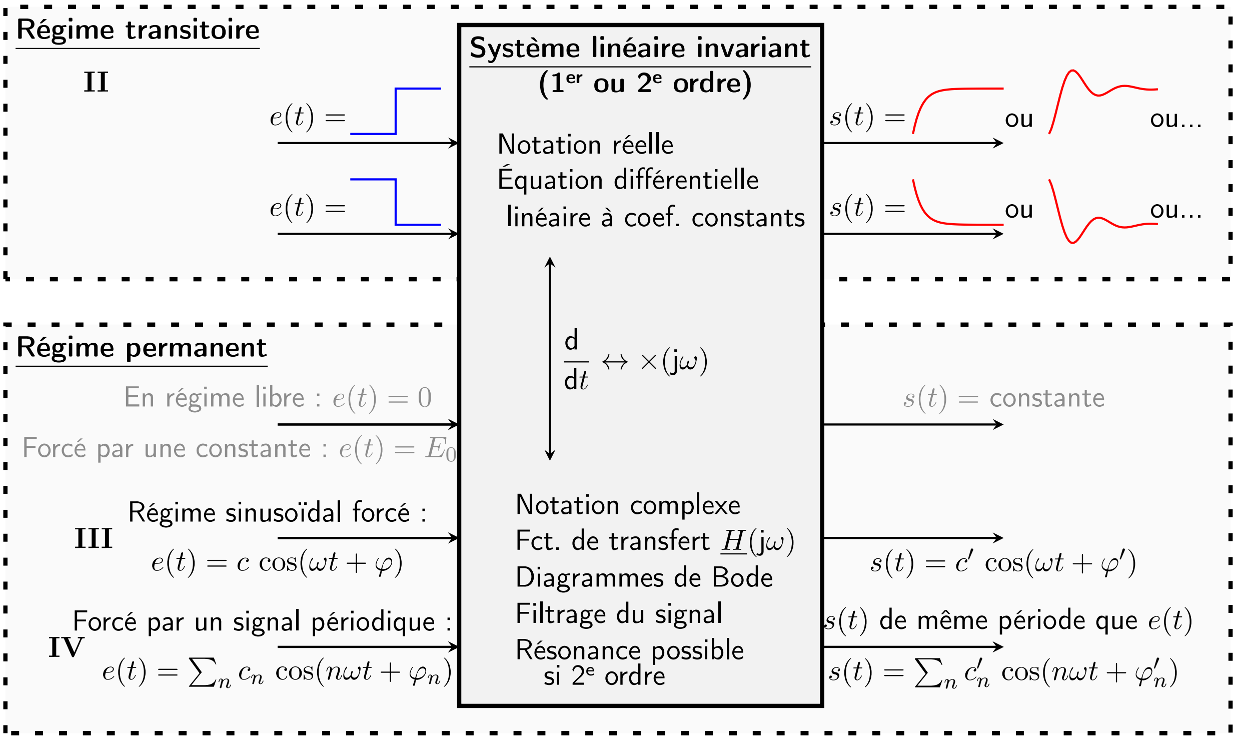
Le tableau ci-dessous rappelle la forme de l'équation différentielle et de la fonction de transfert pour les systèmes linéaires du 1er et du 2e ordre. $e(t)$ est le signal d'entrée, $s(t)$ le signal de sortie.

Ordre du système	Représentation réelle	Représentation complexe $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$
1^{er}	$a\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + b\,s(t) = \beta e(t)$ ou $= \alpha\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ ou $= \beta e + \alpha\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$	$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\alpha \mathrm{j}\omega + \beta}{a\mathrm{j}\omega + b}$
2^{e}	$a\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + c\,s(t) = \gamma e(t)$ ou $= \beta\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ ou $= \alpha\frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}$ ou somme de 2 ou 3 de ces termes à droite	$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\alpha\cdot(\mathrm{j}\omega)^2 + \beta\mathrm{j}\omega + \gamma}{a\cdot(\mathrm{j}\omega)^2 + b\mathrm{j}\omega + c}$

Ici a, b, c, α, β, γ sont des réels indépendants du temps. À chaque fois $a \neq 0$.

I.2 Vision d'ensemble des notions au programme

La suite des notions abordées dans ce document peut se schématiser de la façon suivante, les II, III, IV faisant référence aux parties du document :



Le §I.2.1 fait quelques commentaires sur cette figure.

I.2.1 Différents régimes

Lorsque l'on met sous tension un appareil électrique, les courants et les tensions mettent un certains temps avant d'atteindre leurs valeurs de fonctionnement. De même lorsque l'on coupe l'alimentation d'un appareil, courants et tensions n'atteignent pas instantanément leurs valeurs de repos. Il y a donc un *régime transitoire* qui fait le lien entre deux *régimes permanents*. Ceci peut être lors du passage alimenté → non alimenté (ou l'inverse) pour un circuit électronique, et de façon plus générale lorsque l'on soumet le système à un échelon en entrée (par exemple une voiture qui descend un trottoir). On étudie ceci dans la partie II.

Un peu de vocabulaire pour préciser les notions de permanent/transitoire et de forcé/libre :

Le critère porte sur la sortie $s(t)$.

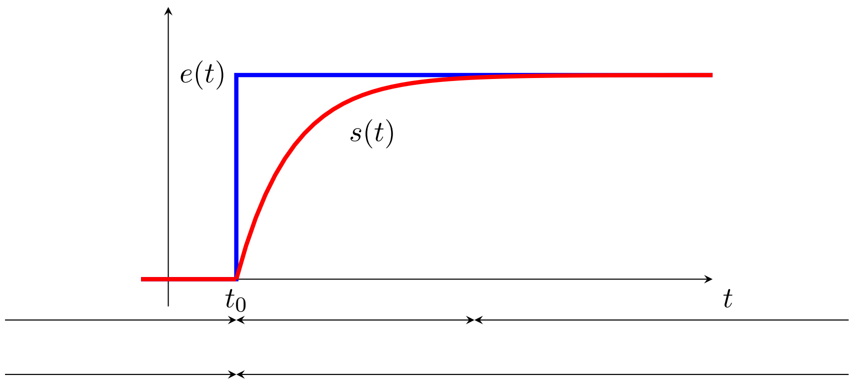
- ▶ **Régime permanent :** lorsque la sortie d'un système a atteint une valeur constante, ou lorsque qu'elle a atteint un régime sinusoïdal (on parle de régime sinusoïdal forcé, RSF), ou un régime périodique.
- ▶ **Régime transitoire :** lorsque la sortie d'un système évolue, pendant un certain temps, entre deux régimes permanents.

Le critère porte sur l'entrée $e(t)$.

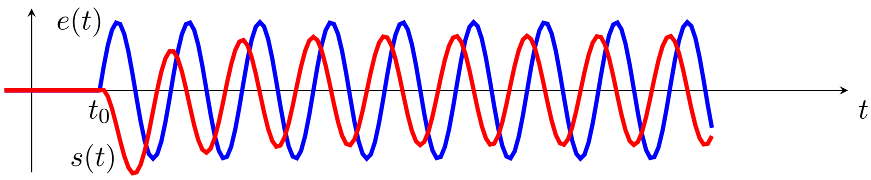
- ▷ **Régime forcé :** lorsque l'entrée du système est maintenue à une valeur non nulle. Cette valeur peut être constante, peut être harmonique (on parle alors de régime sinusoïdal forcé, RSF), ou peut être une fonction périodique (un créneau par exemple).
- ▷ **Régime libre :** lorsque le système n'est alimenté par aucune source d'énergie. Donc lorsque l'entrée du système est nulle ou devient nulle : $e(t) = 0$.

La figure ci-contre représente l'entrée $e(t)$ (un échelon) et la sortie $s(t)$ d'un système linéaire invariant du premier ordre.

$\rightsquigarrow_4$ Indiquer sous chacune des cinq flèches si l'on est en régime permanent, transitoire, libre ou forcé.



$\rightsquigarrow_5$ Faire de même sur cet exemple.



I.3 Critère de stabilité d'un système linéaire invariant

Le régime permanent n'est atteint que si le régime transitoire a une durée finie. Pour cela, il faut que le signal de sortie ne diverge pas vers $+\infty$ ou $-\infty$. Autrement dit, le système doit être stable.

Un exemple de système instable serait un système dont la sortie $s(t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\tau}u = \frac{e(t)}{\tau}, \tag{1}$$

car les solutions sont de la forme $u(t) = u_H(t) + u_P(t)$ avec $u_H(t) = A\,\mathrm{e}^{+t/\tau}$, qui diverge.

On dispose du critère suivant :

> **Méthode : critère pour la stabilité d'un système linéaire du 1^er^ ou du 2^e^ ordre**
> On écrit l'équation différentielle ou la fonction de transfert **sous forme canonique** (et c'est important) comme dans le tableau du paragraphe I.1.
>
> - Avec l'équation différentielle : Le système est stable si et seulement si tous les coefficients devant $s(t)$ et ses dérivées sont *de même signe*.
> - Avec la fonction de transfert : Le système est stable si et seulement si tous les coefficients au *dénominateur* de $\underline{H}$ sont *de même signe*.

$\rightsquigarrow_6$**Exemples :** Les systèmes modélisés par les fonctions de transfert ou équations suivantes sont-ils stables ? (Toutes les constantes sont supposées positives.)

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}\,, \qquad \underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1+\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2}\,, \qquad \underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}\,,$$

$$s''(t) + f\,s'(t) + k\,s(t) = e(t), \qquad s''(t) - f\,s'(t) + k\,s(t) = e(t), \qquad s''(t) + f\,s'(t) + k\,s(t) = -e(t).$$

II Systèmes linéaires invariants en *régime transitoire*

Nous nous intéressons ici à l'étude des **régimes transitoires** pour les systèmes linéaires invariants du 1$^{\text{er}}$ et du 2$^{\text{e}}$ ordre.
Notez que vous étudiez de façon détaillée les régimes transitoires des systèmes linéaires en SI.

II.1 Démarche générale de l'étude du régime transitoire

La démarche générale est la suivante :

- On cherche l'équation différentielle reliant $s(t)$ à $e(t)$.
- Si c'est un système du 1$^{\text{er}}$ ordre, on peut résoudre l'équation (voir §II.2).
- Si c'est un 2$^{\text{e}}$ ordre, on écrit l'équation sous forme canonique et on calcule le facteur de qualité Q. On conclue sur la nature du régime (apériodique, critique, pseudo-périodique) et la durée du régime transitoire en fonction de la valeur du facteur de qualité Q (voir §II.3).

II.2 Cas des systèmes du 1$^{\text{er}}$ ordre

II.2.1 Exemple pour un système du 1$^{\text{er}}$ ordre laissé en régime libre

Méthode : résoudre une équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre sans second membre
On considère une équation homogène (c'est-à-dire que le second membre est nul) :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = 0 \tag{2}$$

Les solutions sont de la forme :

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}, \tag{3}$$

avec A une constante réelle, qui peut être obtenue avec la condition initiale $u(t=0)$.

II.2.2 Exemple pour un système du 1$^{\text{er}}$ ordre soumis à un échelon de tension

Méthode : résoudre une equation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre avec second membre
On prend un second membre nul pour $t<0$ et égal à E/τ pour $t \geq 0$. On a donc, pour $t \geq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau} \tag{4}$$

Les solutions sont de la forme :

$$u(t) = u_H(t) + u_P(t), \tag{5}$$

où :

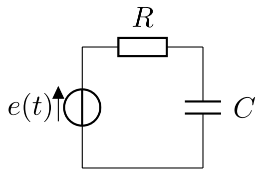
- $u_H(t)$ est une solution de l'équation homogène (sans seconde membre) $\dfrac{\mathrm{d}u_H}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_H = 0$.
  Donc d'après le point méthode précédent : $u_H(t) = A\,\exp(-t/\tau)$.

  On ne connaît pas A, mais on attend d'avoir la solution totale u pour le déterminer, car c'est $u(t=0)$ qu'on connaît, et non pas $u_H(t=0)$.

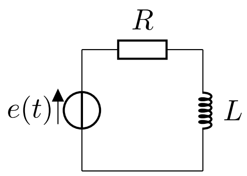
- $u_P(t)$ est une solution particulière de l'équation 4. Pour simplifier, on prend une solution constante : on a alors $\dfrac{\mathrm{d}u_P}{\mathrm{d}t} = 0$, et on voit que $u_P(t) = E$ est solution de 4.

On a donc finalement $u(t) = A\ \exp\left(-t/\tau\right) + E$. On trouve A à l'aide de la valeur de $u(t)$ à un certain temps (on doit alors se servir des relations de continuité : i continu pour une bobine, u continu pour un condensateur).

$\rightsquigarrow_7$ On considère le circuit RC série ci-contre. La source de tension délivre une tension nulle pour $t < 0$ (et le condensateur est déchargé) et égale à E pour $t \geq 0$. Déterminer la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur. Quelle est l'expression de la constante de temps caractéristique ?



$\rightsquigarrow_8$ On considère le circuit RL série ci-contre. La source de tension délivre une tension nulle pour $t < 0$ (et la bobine est déchargée) et égale à E pour $t \geq 0$. Déterminer la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine. Quelle est l'expression de la constante de temps caractéristique ?



II.3 Cas des systèmes du 2e ordre

Considérons un circuit RLC série soumis à $t = 0$ à un échelon de tension (passant de la valeur 0 à la valeur E). Pour $t > 0$, l'équation différentielle suivie par la tension u aux bornes du condensateur peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E.} \tag{6}$$

ou bien :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E.} \tag{7}$$

- ω_0 est la pulsation propre du circuit.
- λ est le coefficient d'amortissement.
- On introduit aussi le facteur de qualité $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}.}$ L'amortissement λ est lié à la dissipation. Plus la dissipation est faible (λ petit), meilleure est la "qualité" Q du système.
- On rencontre aussi, en particulier en SI, le facteur $z = \frac{1}{2Q}$ et la forme $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2z\,\omega_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$.

$\rightsquigarrow_9$ Quelle est l'unité de λ ? L'équation 6 est-elle bien homogène ? Et quelle est l'unité de Q ?

II.3.1 Régime transitoire pseudopériodique, critique, ou apériodique ?

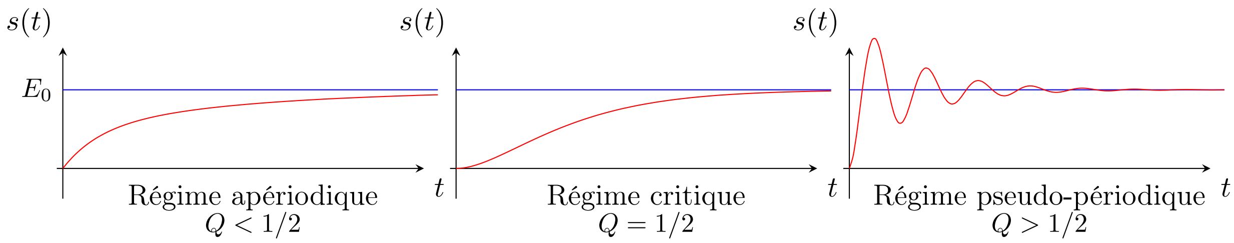
> **Méthode : polynôme caractéristique d'une équation différentielle du 2e ordre et nature des solutions**
> Pour connaître la nature du régime transitoire, il faut écrire l'équation caractéristique associé à l'équation 6 ou 7 :
>
> $$x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0. \tag{8}$$
>
> Le discriminant de cette équation est $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$. Son signe dépend donc de si $Q > 1/2$ ou non.

- Si $Q < 1/2$ (équivalent à $\lambda > \omega_0$ ou $z > 1$), $\Delta > 0$ et les racines sont réelles. Le régime est **apériodique**.
- Si $Q > 1/2$ (équivalent à $\lambda < \omega_0$ ou $z < 1$), $\Delta < 0$ et les racines sont complexes. Le régime est **pseudo-périodique** (on dit aussi périodique amorti).
- Le cas limite $Q = 1/2$ (donc $\lambda = \omega_0$) est le régime **critique**. Il n'y a pas d'oscillations.

On retiendra donc que la valeur limite est $Q = 1/2$, et que si la qualité est "faible" c'est que l'amortissement est grand, et donc que le régime est apériodique.

On retiendra aussi que Q donne une idée du *nombre d'oscillations* dans le régime pseudo-périodique. La durée du transitoire est donc environ $t_{\text{transitoire}} = Q/\omega_0$.

Remarquons que l'on ne cherche pas toujours à avoir un facteur de qualité grand. Par exemple pour la suspension d'une voiture, on ne veut pas d'un régime transitoire avec des oscillations, et donc on cherche $Q < 1/2$.



Réponse $s(t)$ pour un système du 2e ordre soumis à un échelon d'amplitude E_0, avec conditions initiales $s(0) = 0$ et $\dot{s}(0) = 0$.

III Systèmes linéaires invariants en *régime sinusoïdal forcé*

III.1 Introduction et fonction de transfert

Une propriété fondamentale des systèmes linéaires invariants est que si le signal d'entrée est sinusoïdal (ce qui est le cas par définition en RSF), alors le signal de sortie l'est également, *avec la même pulsation*[1]. Autrement dit :

$$\boxed{e(t) = c\,\cos(\omega t + \varphi) \quad \xrightarrow{\text{sys}} \quad s(t) = c'\,\cos(\omega t + \varphi').} \tag{9}$$

Étant donné un circuit électronique, on peut envoyer en entrée une tension $e(t) = c\,\cos(\omega t + \varphi)$, et mesurer sur la sortie $s(t) = c'\,\cos(\omega t + \varphi')$ la valeur de c' et de φ'.
On peut ainsi construire la fonction de transfert $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$, grâce à son module (aussi appelé le gain G) et son argument :

$$\boxed{G = |\underline{H}(\mathrm{j}\omega)| = \frac{c'}{c}, \quad \text{et} \quad \arg(\underline{H}(\mathrm{j}\omega)) = \varphi' - \varphi.} \tag{10}$$

On peut aussi utiliser la notation complexe :

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{e}(t) = \underline{\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \xrightarrow{\text{sys}} \quad \underline{s}(t) = \underline{\alpha}'\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ \qquad \underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{\underline{\alpha}'}{\underline{\alpha}} \\ \qquad \text{où on a posé } \underline{\alpha} = c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \text{ et } \underline{\alpha}' = c'\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi'}. \end{array}} \tag{11}$$

1. Ceci provient essentiellement du fait que lorsque l'on dérive ou intègre une fonction cos, on trouve une fonction $-\sin$ de même pulsation, et pareillement si on dérive une fonction sin, donc on ne change pas de type de fonction par dérivation ou intégration.

On utilise aussi souvent le gain en décibel : $G_{\mathrm{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$ (ou $10 \log |\underline{H}|$ si $e(t)$ et $s(t)$ sont des grandeurs homogènes à une puissance).

Rappel : On peut écrire un nombre complexe soit sous la forme $z = a + ib$ (a partie réelle, b partie imaginaire), soit sous la forme $z = r \exp(\mathrm{j}\phi)$ avec $r = |z|$ le module et $\phi = \arg(z)$ l'argument.

$\rightsquigarrow_{10}$ Donner l'expression de $|z|$ et de $\arg(z)$ en fonction de a et b.

III.2 Prédiction du régime permanent sans résoudre d'équation

Avant même de calculer ou de tracer la fonction de transfert, on peut prédire simplement le comportement du système à basse fréquence ($\omega \to 0$) et à haute fréquence ($\omega \to +\infty$) en remplaçant bobines et condensateurs par leur comportement limite.

$\rightsquigarrow_{11}$ À haute fréquence, bobine = et condensateur =

$\rightsquigarrow_{12}$ À basse fréquence, bobine = et condensateur =

III.3 Tracé de la fonction de transfert

III.3.1 Diagrammes de Bode

La fonction de transfert est décrite par le diagramme de Bode en amplitude et en phase.

- Le premier trace le gain $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20 \log|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|$.
- Le deuxième trace le déphasage $\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(\mathrm{j}\omega))$.

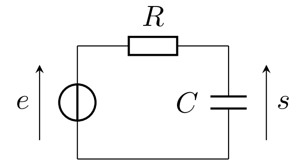
Quelques propriétés :

- Pour les systèmes du 1$^{\text{er}}$ ordre (dénominateur de $\underline{H}$ du type $a + b(\mathrm{j}\omega)$) : dans le diagramme de Bode en gain, les asymptotes de ces systèmes sont soit horizontales, soit de pente -20dB/décade ou +20dB/décade.
- Pour les systèmes du 2$^{\text{e}}$ ordre (dénominateur de $\underline{H}$ du type $a + b(\mathrm{j}\omega) + c(\mathrm{j}\omega)^2$) : dans le diagramme de Bode en gain, les asymptotes de ces systèmes sont soit horizontales, soit de pente -20dB/décade, +20dB/décade, -40dB/décade ou +40dB/décade.

III.3.2 Un exemple de système du 1$^{\text{er}}$ ordre

$\rightsquigarrow_{13}$ Pour le système ci-contre :

1. Étudier le comportement asymptotique sans calcul.
2. Donner l'expression de la fonction de transfert.
3. Calculer son module et son argument.
4. Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain et en phase.

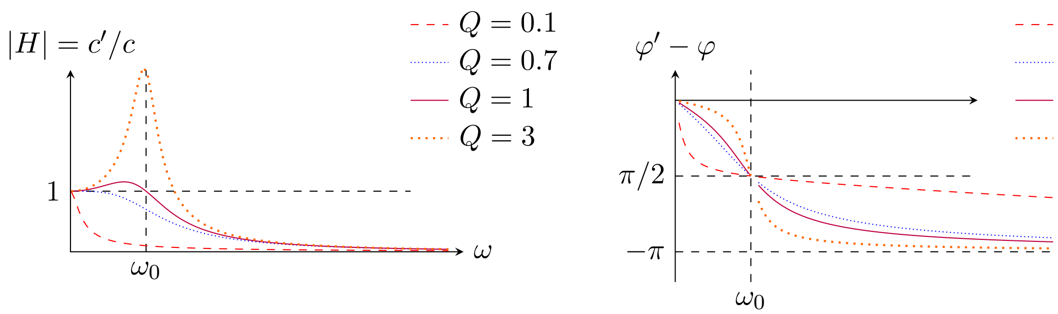


III.4 Résonance dans le cas des systèmes du 2^{e} ordre

Un phénomène important peut apparaître lorsque le système forcé est du 2^{e} ordre : il peut y avoir résonance.

> Pour certaines pulsations d'excitation ω proches de la pulsation de résonance du système, la sortie présente une amplitude très importante.
>
> La largeur de la bande de pulsations dans laquelle la résonance est importante est contrôlée par le facteur de qualité Q du système linéaire. Plus Q est grand, plus la résonance est étroite (c'est-à-dire qu'elle a lieu seulement pour des pulsations proches de celle de résonance).

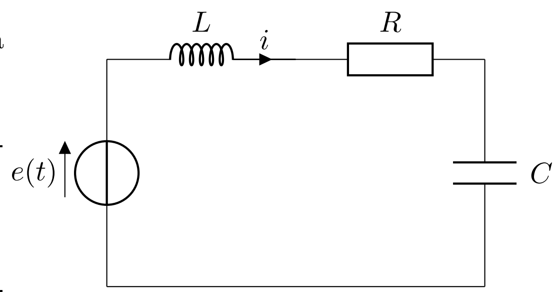
Voici un exemple de courbe de gain et de phase pour un système du second ordre qui présente une résonance. Il s'agit d'un circuit RLC série forcé par une tension d'entrée $e(t) = c\cos(\omega t + \varphi)$, et la sortie que l'on mesure est la tension aux bornes du condensateur : $s(t) = c'\cos(\omega t + \varphi')$. Le facteur de qualité est proportionnel à $1/R$, il est donc lié à la dissipation : plus la dissipation est faible (resistance R de faible valeur), "meilleure est la qualité" (Q est grand).



(On voit qu'ici la résonance n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2} \simeq 0.7$, mais il y a des systèmes du second ordre où la résonance existe pour toutes les valeurs de Q.)

Exemple : étude de la résonance en intensité dans le circuit RLC série

On étudie le circuit ci-contre. Le générateur idéal de tension délivre une tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.
$\rightsquigarrow_{14}$ On traitera les questions qui suivent sur une feuille à part.



1. Par une étude asymptotique, donner la valeur du courant pour $\omega \simeq 0$, puis pour $\omega \to \infty$.
2. On cherche $i(t)$ sous la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.

   Par quelle expression complexe ce signal est-il représenté ?
3. Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I}_m$ de i en fonction de R, L, C, E_m et ω.

   Écrire ensuite cette expression sous la forme canonique $\underline{I}_m = \dfrac{E_m/R}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$, en introduisant la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q, et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

   On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R, L et C.
4. En déduire l'expression de l'amplitude I_m du courant en fonction de x et tracer l'allure de la courbe $I_m = f(x)$.

   Pour quelle pulsation la résonance en intensité a-t-elle lieu ?
5. En déduire également l'expression de la différence de phase φ entre l'intensité et la tension d'alimentation en fonction de x.

   Donner l'allure de la courbe en déterminant la valeur de φ en hautes fréquences, en basses fréquences et à la résonance.

6. Définir la bande passante et établir son expression en fonction de ω_0 et Q. Comment varie-t-elle lorsque Q augmente ?

7. L'acuité de la résonance est définie comme $A_c = \dfrac{\omega_r}{\Delta\omega}$, avec ω_r la pulsation à la résonance.

   Donner son expression en fonction du facteur de qualité.

   Quelle est l'influence du facteur de qualité sur l'acuité de la résonance en intensité ?

   Représenter I_m en fonction de la pulsation pour différentes valeurs de Q.

8. Application numérique pour $C = 1.5\,\mathrm{nF}$, $R = 3.0\,\mathrm{k\Omega}$, et $L = 1.5\,\mathrm{mH}$.

   Donner la valeur de la pulsation à la résonance, de la largeur de la bande passante et de l'acuité.

IV Systèmes linéaires invariants forcés par un signal périodique, *filtres*

On impose maintenant, à l'entrée du système linéaire invariant, un signal périodique de période T_0 et de pulsation $\boxed{\omega_0 = 2\pi/T_0.}$ Comment prévoir le signal observé en sortie ?

IV.1 Décomposition de Fourier d'un signal périodique et prédiction de la sortie

Le signal d'entrée peut se décomposer en série de Fourier, soit sur la base des exponentielles complexes, soit sur la base des fonctions cosinus :

$$\boxed{e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{\alpha}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).} \tag{12}$$

Ici, les $\underline{\alpha}_n$ sont complexes et les c_n et φ_n sont réels. On retiendra plutôt la deuxième expression, et le vocabulaire suivant :

- c_0 est la **valeur moyenne** du signal, ou encore sa **composante continue**.
- Le n-ième terme est appelé l'**harmonique** de rang n, sa pulsation est $n\omega_0$ (multiple entier de ω_0).
- L'harmonique $n = 1$ est de même période que le signal $e(t)$, il s'agit du **fondamental**. ω_0 est aussi appelée pulsation fondamentale.

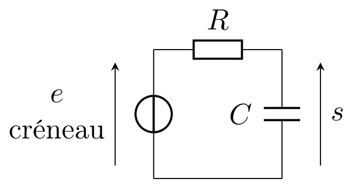
On rappelle que pour chaque harmonique, on a $c_n\,\cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \xrightarrow{\text{sys}} c'_n\,\cos(n\omega_0 t + \varphi'_n)$.
On regarde donc individuellement comment chaque harmonique est transformée par la fonction de transfert.
Dit autrement, on a :

$$\boxed{\begin{gathered} e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad \xrightarrow{\text{sys}} \quad s(t) = c'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c'_n \cos(n\omega_0 t + \varphi'_n), \\ \text{avec } \frac{c'_n}{c_n} = |\underline{H}(\mathrm{j}n\omega_0)|, \quad \text{et} \quad \varphi'_n - \varphi_n = \arg(\underline{H}(\mathrm{j}n\omega_0)). \end{gathered}} \tag{13}$$

IV.2 Filtres

Lorsque l'on a un système linéaire du 1er ou du 2e ordre, on peut choisir de s'en servir comme d'un filtre ou de l'étudier comme s'il s'agissait d'un filtre.
Un filtre agit de façon différente sur chaque fréquence du signal : il en amplifie ou réduit certaines, et il les déphase. C'est encore avec le formalisme de la fonction de transfert que l'on caractérise un filtre donné, et ceci grâce à la propriété de l'équation 13.

Exemple : on considère le filtre passe-bas ci-contre. Sa pulsation de coupure est $\omega_c = \dfrac{1}{RC}$.
On envoie en entrée un signal créneau $e(t)$ de pulsation $\omega_0 = 0.2\omega_c$. On note $T_0 = 2\pi/\omega_0$ sa période.



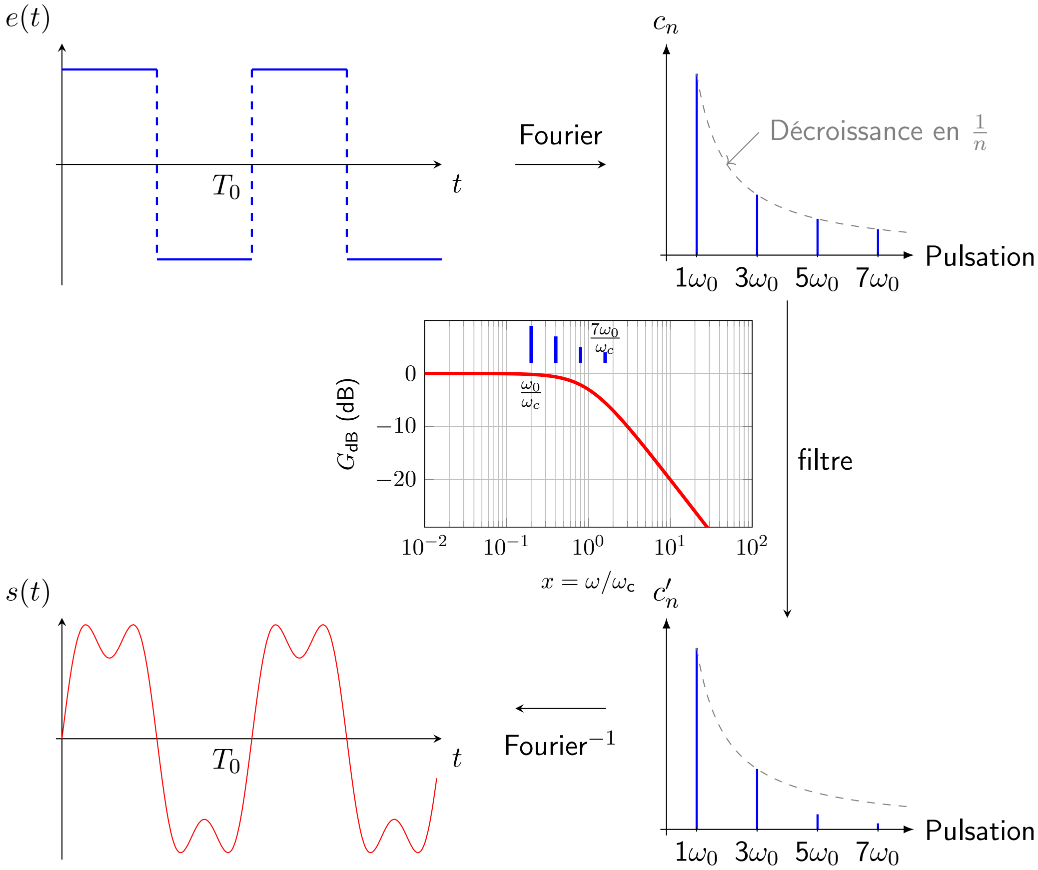
<u>Attention :</u> il y a donc deux pulsations importantes : celle du filtre ω_c, qui est fixée par les valeurs de R et C, et celle du signal que l'on envoie (ω_0) et qui peut varier.

La figure ci-dessous détaille l'analyse :

▷ on décompose le signal en sa série de Fourier (il se trouve que pour le signal considéré seul les harmoniques impaires sont présentes, donc à $1\omega_0$, $3\omega_0$, etc).

▷ Puis on regarde à l'aide du diagramme de Bode en gain comment chaque harmonique est amplifiée ou réduite.

▷ Enfin on obtient le signal réel comme somme de la nouvelle série de Fourier.



Remarque : on peut ensuite étudier le déphasage introduit par le filtre, qui a aussi un effet.

IV.2.1 Bande passante et pulsation de coupure d'un filtre

La bande passante est l'ensemble des pulsations qui "passent" sans être trop atténuées, c'est-à-dire qu'un signal en entrée ayant une pulsation ω comprise dans la bande passante n'est pas trop atténué.
Les pulsations de coupures sont les pulsations qui délimitent la bande passante.
Par convention, ce sont celles pour lesquelles $|\underline{H}|$ est divisée par $\sqrt{2}$:

$$\omega_c \text{ est telle que } |\underline{H}(\omega_c)| = \frac{|\underline{H}_{\max}|}{\sqrt{2}}. \tag{14}$$

Si l'on passe au log, comme $20\log(\sqrt{2}) \simeq 3$, la définition devient :

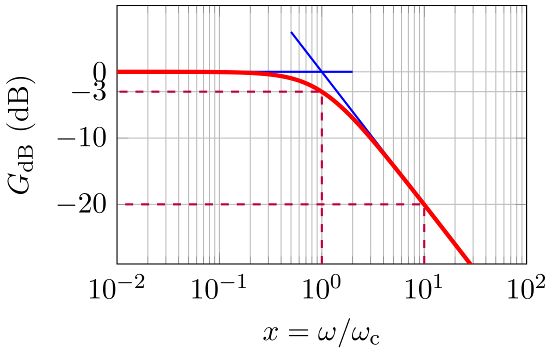
$$\omega_c \text{ est telle que } G_{\rm dB}(\omega_c) = G_{\rm dB,max} - 3\,\text{dB}. \tag{15}$$

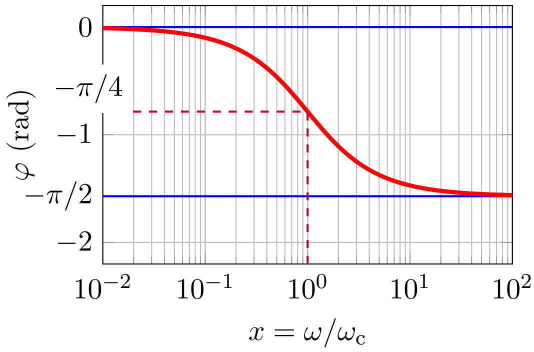
IV.2.2 Filtre passe-bas d'ordre 1

La forme canonique pour ce filtre est :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}\,. \tag{16}$$

Exemple : le circuit RC série lorsque l'on prend la tension aux bornes du condensateur (que l'on a étudié juste au dessus).
L'asymptote hautes fréquences de la courbe de gain a pour pente -20 dB/décade.



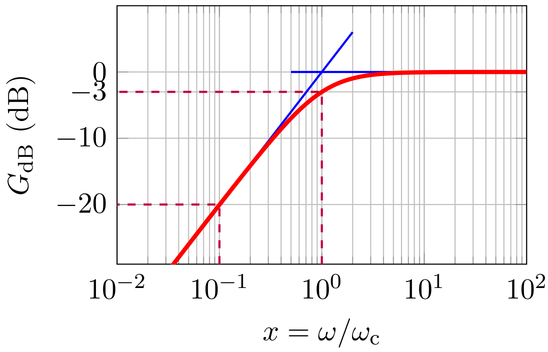


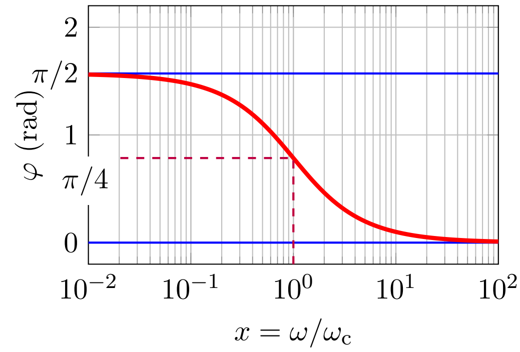
IV.2.3 Filtre passe-haut d'ordre 1

La forme canonique pour ce filtre est :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = H_\infty \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}\,. \tag{17}$$

Exemple : circuit RC série lorsque l'on prend la tension aux bornes de la résistance, ou RL série lorsque l'on prend la tension aux bornes de la bobine.
L'asymptote basses fréquences de la courbe de gain a pour pente $+20$ dB/décade.



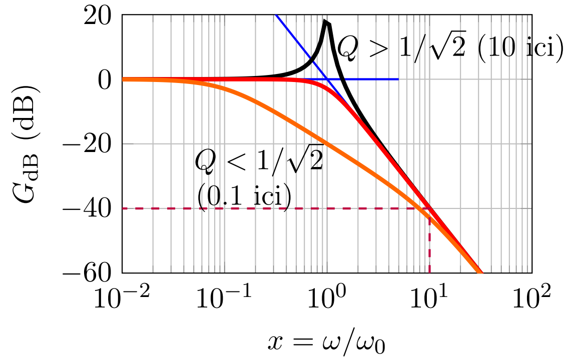


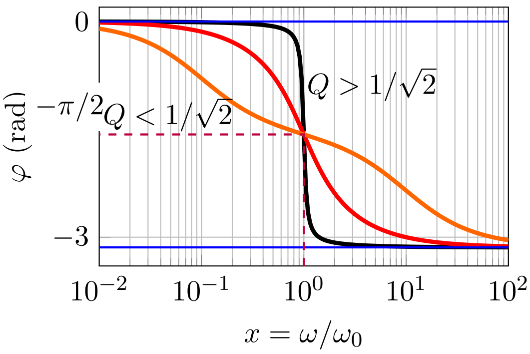
IV.2.4 Filtre passe-bas d'ordre 2

La forme canonique pour ce filtre est :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1 + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0} + \left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2}\,.$$

- **Exemple :** circuit RLC série lorsque l'on prend la tension aux bornes du condensateur.
- L'asymptote hautes fréquences de la courbe de gain a pour pente -40 dB/décade.
- Si $Q > 1/\sqrt{2} \simeq 0.7$, la courbe de gain présente une résonance.



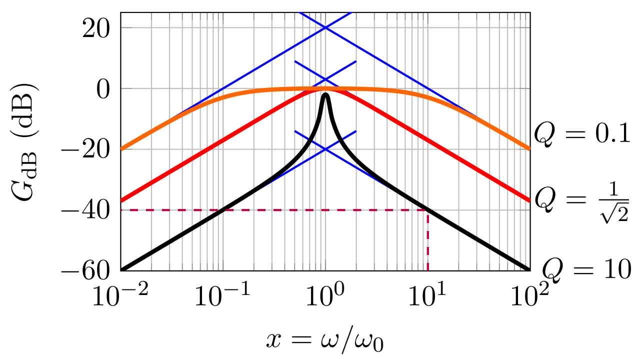


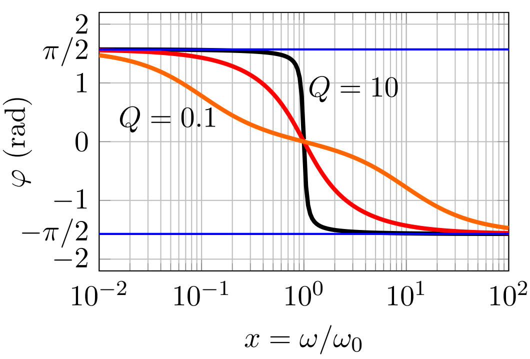
IV.2.5 Filtre passe-bande d'ordre 2

La forme canonique pour ce filtre est :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\dfrac{H_0}{Q}\dfrac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0} + \left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

- **Exemple** : circuit RLC série lorsque l'on prend la tension aux bornes de la résistance
- Les asymptotes hautes et basses fréquences de la courbe de gain ont pour pente ±20 dB/décade.



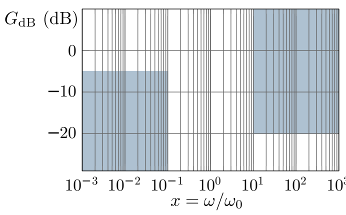


IV.2.6 Autres

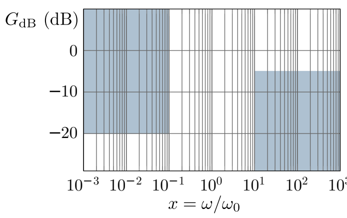
Il existe évidemment d'autres types de filtres : passe-haut d'ordre 2, coupe bande, passe-tout déphaseur, ordres supérieurs...

IV.2.7 Gabarit d'un filtre

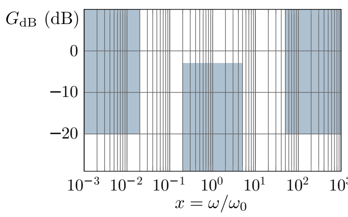
Le gabarit d'un filtre est le diagramme de Bode du filtre sur lequel apparaissent les zones de pulsations à laisser passer ou à atténuer.
La figure ci-dessous donne des exemples de gabarits des filtres classiques. Le tracé du gain doit éviter les zones grisées.



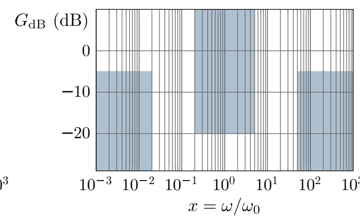
(a) Filtre passe-bas



(b) Filtre passe-haut



(c) Filtre passe-bande



(d) Filtre coupe-bande ou filtre réjecteur