Thermodynamique et mécanique des fluides

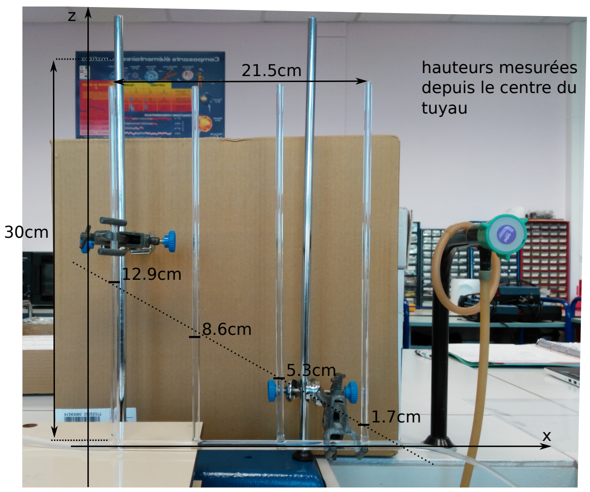
Autour de l'expérience de Poiseuille

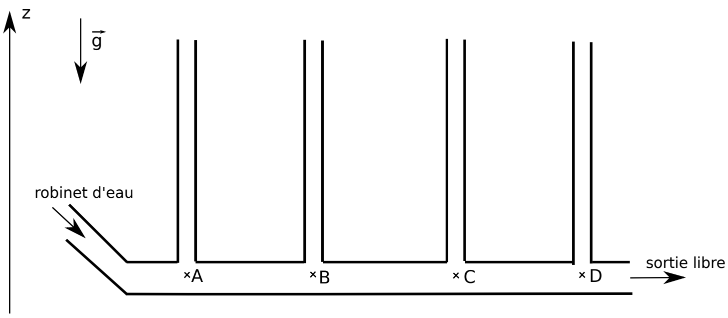
Quelques notes supplémentaires sur l'expérience de perte de charge.

I Perte de charge régulière

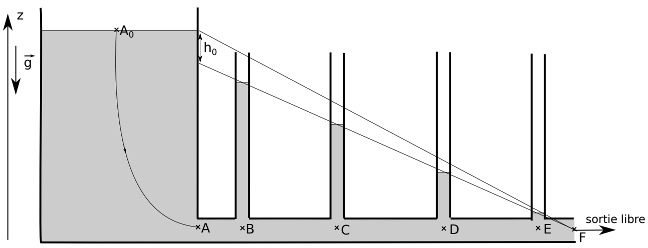
I.1 Expérience

On utilise le dispositif suivant :





Ici l'arrivée d'eau est directement branchée sur le robinet. Notons qu'on peut aussi, si on veut contrôler la pression à l'entrée du dispositif, utiliser un vase de Mariotte (comme ci-dessous, même si ce n'est pas tout à fait un vase de Mariotte). La hauteur d'eau donne alors la pression d'entrée.



I.2 Observations

On observe des niveaux d'eau différents dans chacun des tubes verticaux. On a repéré, sur la photographie ci-dessus, les hauteurs d'eau en centimètres.

Le niveau décroît à mesure que l'on s'éloigne de l'arrivée d'eau.

La différence de hauteur entre le premier et le dernier tube est d'autant plus grande que le débit est important.

I.3 Interprétation

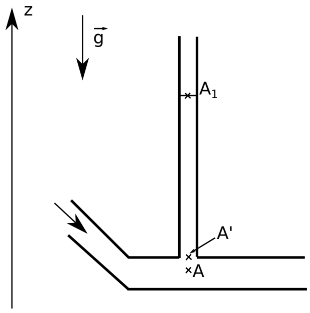
Pour modéliser l'expérience, on effectue les hypothèses suivantes :

- Le régime est stationnaire.
- L'écoulement est incompressible.
- Le diamètre du tuyau horizontal ($d \leq 4.5\,\mathrm{mm}$ ici) est négligeable devant les hauteurs d'eau mesurées.
- La section du tuyau horizontale est constante, notée S.

Lien entre hauteur h dans un tube et pression

Prenons l'exemple du tuyau vertical 1 situé au dessus du point A (schéma ci-dessous à droite). Dans le tuyau, le fluide est statique, il est aussi incompressible.

> ▶$\rightsquigarrow_1$ Quel est alors la relation entre hauteur d'eau h dans ce tuyau et la pression au point A ? Que permettent donc de faire ces tubes horizontaux ?



On écrit la relation de la statique des fluides entre le point A_1 du liquide à la surface, et le point A' ou A (indifféremment) du liquide à la limite basse du tuyau.

On arrive alors immédiatement à $p_A = p_0 + \rho g h$.

Remarque :

- La relation de la statique s'applique uniquement dans le tuyau vertical (car dans le tuyau horizontal le fluide n'est pas statique). On a donc en fait strictement $p_{A'} = p_0 + \rho g h$. Puis on néglige la différence de pression entre A et A'. On doit de toute façon supposer la pression dans le tuyau horizontal constante sur toute section dans beaucoup d'étapes du raisonnement.

  On peut évaluer cette différence de pression entre A et A' si l'écoulement est laminaire et parfait, car on a alors $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v} = 0$, et l'équation d'Euler donne $-\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} = 0$, c'est-à-dire que le fluide suit la loi de l'hydrostatique : $p_A = p_{A'} + \rho g R$, avec R le rayon du tuyau horizontal.

  Ainsi, si $R \ll h$ on a bien $p_A \simeq p'_A$.

  Si l'écoulement est turbulent on ne peut plus dire grand chose, mais l'ordre de grandeur restera le même.

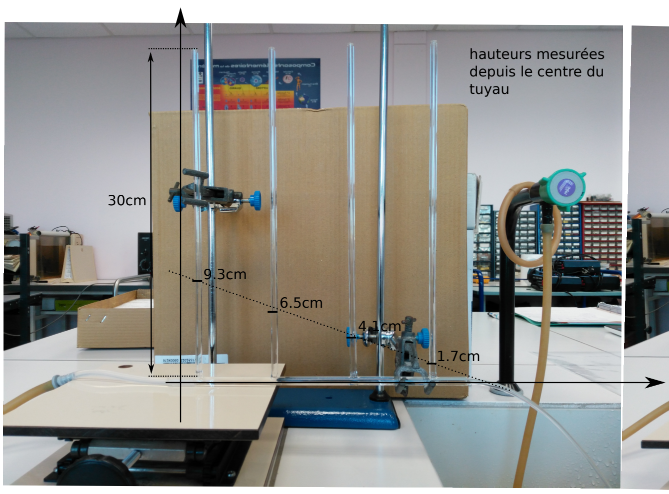
- On suppose que l'eau dans le tuyau vertical est immobile, ce qui pourrait ne pas être tout à fait le cas s'il y avait par exemple un écoulement de type rouleau ou recirculation entraîné par l'écoulement vertical en bas. Mais ce n'est pas le cas si les tuyaux verticaux sont assez fins.

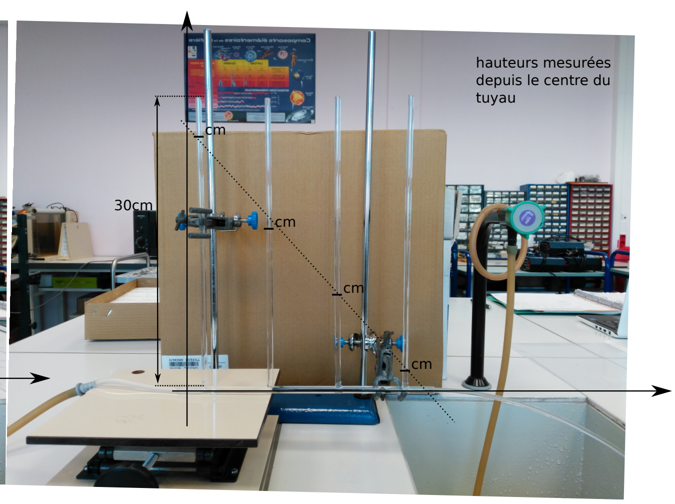
- On néglige les phénomènes de tension de surface (pas de montée de l'eau par capillarité).

Question suivante :

> ▶$\rightsquigarrow_2$ La condition $p = p_0$ dans le jet à l'air libre semble-t-elle vérifiée expérimentalement ?

On peut le vérifier expérimentalement en exploitant la photographie de l'expérience comme fait au début du document ou sur les deux autres exemples ci-dessous, où on a tracé la droite en pointillés reliant toutes les hauteurs d'eau. Zoomer pour y voir mieux.





Cette droite pointillés croise le jet là où $p = p_0$. Ainsi, si $p = p_0$ à la sortie à l'air libre, alors cette droite doit croiser le centre du jet juste au niveau de la sortie.
On constate sur trois essais différents que c'est plus ou moins le cas. Mais la précision ici ne permet pas vraiment de trancher.
Que peut-on dire d'un point de vue théorique ? On s'attend à $p = p_0$ dans tout le jet à l'air libre si :

- On néglige la variation de pression dans la section du jet (son rayon étant de 2.25 mm, on a $\rho g r \simeq 0.2$ mbar, ce qui est bien négligeable).

- On néglige la perte de charge singulière qui a lieu lors de la sortie, et qui dépend de l'état de surface et de la géométrie de l'embouchure du tuyau. On pourrait chercher des valeurs pour avoir une idée de l'ordre de grandeur associé : elle sera du type $\Delta p = 0.5 k \rho U^2$ avec k de l'ordre de 1, ce qui donne entre 0.5 et 50 Pa pour $U = 0.1$ ou $1\,\mathrm{m/s}$.

  Avec cet effet, si on a réellement p_0 pour le jet à l'air libre, il y a alors un peu plus que p_0 dans le tuyau juste avant la sortie. Ceci tend donc à réhausser le niveau d'eau dans tous les tubes horizontaux, et à donner une intersection de la droite avec le jet un peu après la sortie.

  La hauteur de laquelle tous les niveaux d'eau sont réhaussés est, pour $\Delta p = 0.5$ Pa et 50 Pa, respectivement de 0.5 mm à 5 cm. C'est donc très significatif à grandes vitesses.

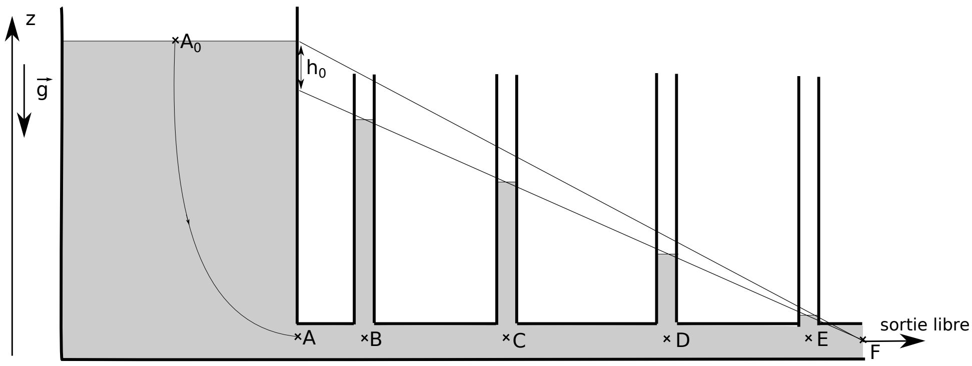
- On néglige le fait qu'avec la loi de Pascal sur la tension de surface, la pression au sein du jet est supérieure à p_0 d'un terme $\Delta p = \gamma \left(\dfrac{1}{R_{\text{jet}}} + 0 \right) = 32$ Pa, soit une hauteur statique d'eau de 3.2 mm.

  On devrait ainsi avoir une pression supérieure à p_0 dans le jet, et donc (comme les niveaux d'eau dans les tubes verticaux mesurent par rapport à p_0) une droite qui arrive au-dessus du jet en sortie et qui le coupe plus loin.

Autre question :

> ►⇝3 Dans le cas de l'utilisation d'un vase de Mariotte, la hauteur d'eau dans le réservoir doit-elle être alignée avec celle des tuyaux horizontaux ?

La perte de charge étant régulière, on a $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \text{cst}$ dans le tuyau horizontal. La pression décroit donc linéairement entre une valeur p_A en entrée, et une valeur p_0 en sortie.
Si $p_A = p_{A0} + \rho g h(A_0)$, alors on s'attend à ce que la hauteur d'eau dans le réservoir soit alignée avec celle des tuyaux horizontaux.
Mais ce n'est en fait pas le cas : p_A est inférieure à $p_{A0} + \rho g h(A_0)$, pour plusieurs raisons, et on s'attend donc plutôt à observer ceci, avec un décrochage h_0 non nul :



Plusieurs raisons à cela :

- L'application de la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre A_0 et A donne $p_0 + \rho g h(A_0) = p_A + \dfrac{1}{2}\rho U^2$. La pression en A n'est donc pas égale à la pression p_0 augmentée de $\rho g h$, il y a aussi un terme de vitesse qui réduit p_A.

  Comme il s'agit d'une réduction de la pression, les hauteurs d'eau dans les tuyaux verticaux seront plus faibles.

- Le profil de perte de charge régulière (portion du tuyau où $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = \mathrm{cst}$) ne s'établit pas dès l'entrée du tuyau. Il y a une certaine longueur après A où la pression ne décroit pas linéairement. On parle de longueur d'établissement du régime permanent.

  Il existe des expressions pour cette longueur dans le cas des nombres de Reynolds assez bas, pour lesquels l'écoulement est laminaire ($Re \leq 2300$). Le régime permanent dans le reste du tuyau est alors un écoulement de Poiseuille. On trouve alors dans la littérature que ceci donne une chute de pression de l'ordre de $2.2\dfrac{\rho U^2}{2}$, avec U la vitesse moyenne de l'écoulement (le 2.2 est approximatif).

  Dans le cas où $Re > 2300$, l'écoulement est turbulent et cette formule ne s'applique plus. On peut néanmoins s'attendre aussi à une perte de charge singulière qui diminue la pression.

- Il y a une perte de charge singulière lors de l'entrée en A, ce qui est d'ailleurs directement reliée au point précédent.

  On trouve par exemple dans la littérature que le coefficient k de perte de charge à la sortie d'un réservoir est de l'ordre de 0.5, donnant une perte de charge de $\dfrac{\rho U^2}{2}$.

  Ici aussi elle dépend du profil et du tuyau, et tout ceci est approximatif.

En résumé, on peut affirmer que l'effet cumulé de tout ceci donne lieu à une perte de charge de $k\dfrac{\rho U^2}{2}$ avec k de l'ordre de 3.

La différence de hauteur h_0 sur le schéma ci-dessus est alors $h_0 \sim k\dfrac{U^2}{2g}$, soit 15 cm si $U = 1\,\mathrm{m/s}$, et 1.5 mm si $U = 0.1\,\mathrm{m/s}$. Pour pouvoir la négliger il faut qu'elle soit très petite devant la hauteur d'eau h du réservoir.

Prédiction de la relation de Bernoulli dans le cas parfait

> ▶⇝$_4$ Montrer que si on applique la relation de Bernoulli, la pression dans le tuyau horizontal devrait être constante.

$p+\rho g z+\dfrac{1}{2}\rho U^2$ se conserve, or z est constant et U aussi (section constante, écoulement incompressible). Donc sous l'hypothèse du fluide parfait, la pression est constante.

Perte de charge

> ▶⇝$_5$ Observe-t-on une pression constante dans le tuyau ? Pourquoi ? À quel type de perte de charge a-t-on à faire ?

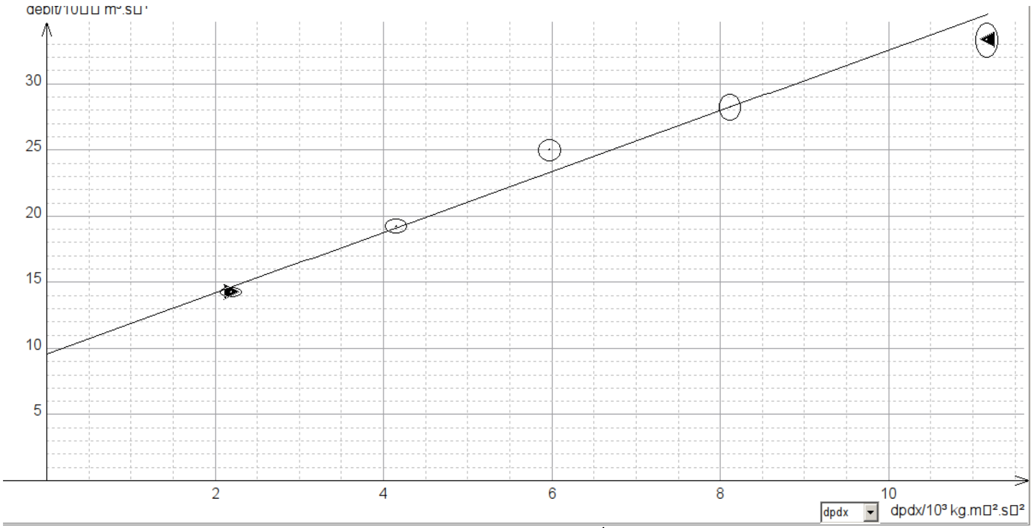
Non elle n'est pas constante. C'est une perte de charge régulière.

> ▶⇝$_6$ Évaluer la perte de charge linéique $\dfrac{\Delta p_C}{L}$, avec L distance entre premier et dernier tuyau et Δp_C perte de charge correspondante.

On mesure la distance L, on évalue Δp_c à l'aide des hauteurs d'eau, et on en déduit $\dfrac{\Delta p_C}{L}$.

> ▶⇝$_7$ La formule de Poiseuille indique que le débit volumique et la perte de charge linéique doivent être proportionnelles si le nombre de Reynolds est assez faible : $D_v = \dfrac{\pi d^4}{128\eta}\dfrac{\Delta p_C}{L}$. Les données expérimentales permettent-elles de valider ceci ?

On recommence l'expérience précédente en changeant le débit d'eau. On peut calculer expérimentalement $\frac{\Delta p_C}{L}$ comme précédemment. On mesure le débit d'eau en chronométrant le temps de remplissage d'une éprouvette de 0.5 L. On trace ensuite le débit D_v en fonction de $\frac{\Delta p_C}{L}$ dans le graphique ci-dessous.



D_v en fonction de $\frac{\Delta p_C}{L}$.

Pour les incertitudes on a retenu ± 0.5 cm pour la mesure de la hauteur dans le premier tube, ± 0.25 cm dans le dernier, et ± 1 s sur T. (incertitudes élargies)

On voit que la formule de Poiseuille n'est pas du tout vérifiée (il y a une ordonnée à l'origine importante). C'est très probablement parce que les nombres de Reynolds sont ici compris entre 5×10^6 et 10×10^6, largement au dessus de la limite laminaire-turbulent à 2300.

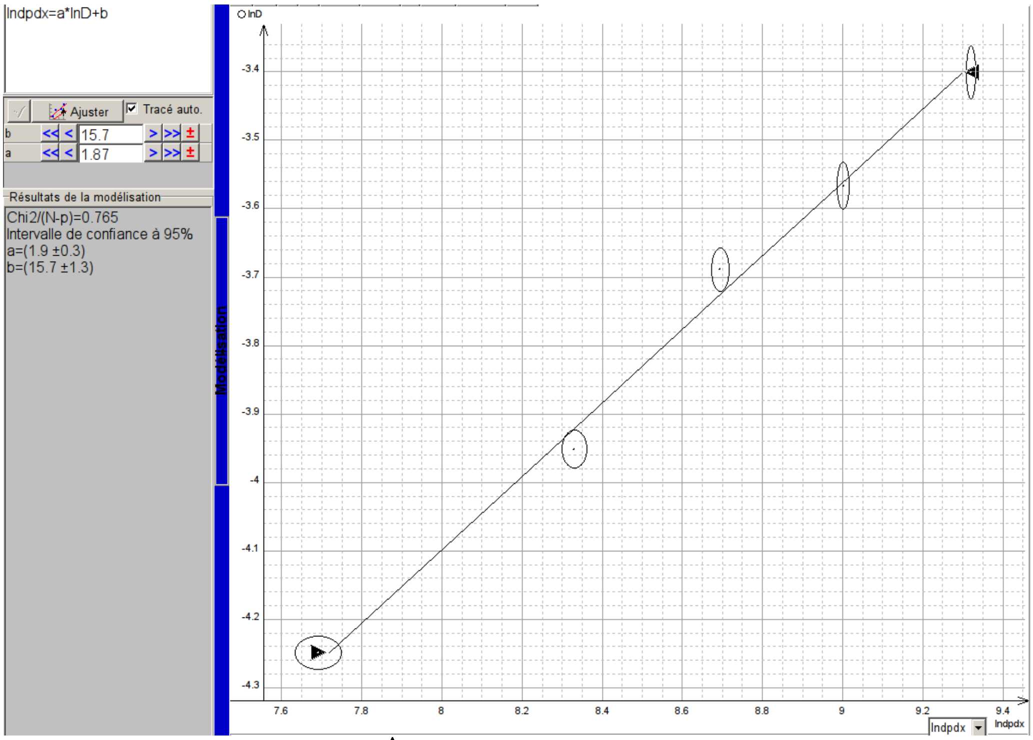
> ►$\rightsquigarrow_8$ Pour un écoulement turbulent à nombre de Reynolds inférieur à 10^5, on peut utiliser la formule de Blasius : $\Delta p_c = \frac{1}{2}\rho U^2 \, \lambda \frac{L}{d}$, avec $\lambda = 0.316 R_e^{-0.25}$. Peut-on vérifier ceci expérimentalement ?

Notations : d le diamètre de la conduite, L sa longueur, ρ la masse volumique de l'écoulement et U sa vitesse, nombre de Reynolds de l'écoulement $R_e = \frac{\rho U d}{\eta}$.

En manipulant ceci on montre que la formule de Blasius s'écrit aussi $\frac{\Delta p_C}{L} = 0.24 \frac{\rho^{0.75}\eta^{0.25}}{d^{4.75}} \, D_v^{1.75}$, soit encore en passant au log :

$$\frac{\Delta p_C}{L} = [\ln(0.24) + \ln(\rho^{0.75}\eta^{0.25}) - 4.75 \ln(d)] + 1.75 \, \ln(D_v). \qquad (1)$$

On trace donc $\ln \frac{\Delta p_C}{L}$ en fonction de $\ln D_v$.



$\ln \dfrac{\Delta p_C}{L}$ en fonction de $\ln D_v$.

Pour les incertitudes on a retenu ± 0.5 cm pour la mesure de la hauteur dans le premier tube, ± 0.25 cm dans le dernier, et ± 1 s sur T. (incertitudes élargies)

On constate que les points sont plutôt alignés, et que la pente est compatible avec la valeur de 1.75 (mais l'incertitude est assez grande et les points ne couvrent pas une grande gamme de valeurs...).

On peut exploiter la valeur de l'ordonnée à l'origine pour remonter au diamètre du tuyau : on trouve alors $d \sim 5$ cm. Il y a donc clairement un problème, et la formule de Blasius n'est en fait pas vérifiée.

On peut penser que ce sont les nombres de Reynolds trop importants qui sont en cause, car ceux-ci sortent du domaine dans lequel la formule est valide. Et que le tuyau n'est pas lisse : pour du verre on trouve $\epsilon \simeq 2.5 \times 10^{-3}$ mm, soit ici une rugosité relative $a \simeq 5 \times 10^{-4}$. On constate alors dans le diagramme de Moody qu'on est dans une zone où λ est quasi constant, avec tout de même une bonne incertitude.

I.4 Liens

http://gpip.cnam.fr/ressources-pedagogiques-ouvertes/hydraulique/co/3grain_PertesChargeVariation
html

Description d'une expérience permettant de vérifier la formule de Poiseuille en régime laminaire : *Physique expérimentale : Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, éditions De Boeck, M. Fruchart et al.