Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 6

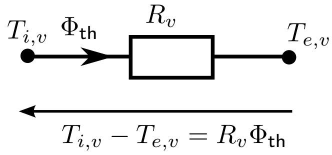
Correction – DM 9 – Étude de doubles vitrages

Simple vitrage

1 - a - Le problème est unidimensionnel, le milieu est sans pertes ni sources, on a donc l'équation de la chaleur : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Comme le régime est stationnaire, on a $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$. Donc $T = T(x)$, et l'équation de la chaleur devient $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0,}$ ce qui s'intègre en $\boxed{T(x) = Ax + B.}$

b - On fait un schéma électrique équivalent.



Il faut donc exprimer le flux thermique Φ_{th} passant par la surface S en fonction de $T_{i,v} - T_{e,v}$, et on en déduira la résistance R_v.

⋆ D'après la loi de Fourier,

$$j_{\text{th}} = -\lambda_v \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\lambda A,$$

avec A le coefficient directeur de $T(x)$ (cf question 1).

⋆ Or on a $A = (T_{e,v} - T_{i,v})/e$ (pente de la droite).

⋆ Donc $j_{\text{th}} = -\lambda_v \dfrac{T_{e,v} - T_{i,v}}{e}$, et $\Phi_{\text{th}} = S \times j_{\text{th}} = \mathrm{d}S\lambda_v \dfrac{T_{i,v} - T_{e,v}}{e}$.

⋆ Par identification, on en déduit que $\boxed{R_v = \dfrac{e}{S\lambda_v}.}$

A.N. : $\boxed{R_v = 2.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}.}$

2 - ⋆ On considère la couche conducto-convective coté intérieur.

D'après la loi de Newton rappelée dans l'énoncé, le flux thermique allant de l'air intérieur vers le verre est $\Phi_{\text{conv}} = h_i S \times (T_i - T_{i,v})$.

Or, si on introduit une résistance équivalente $R_{\text{air int-verre}}$, on doit alors écrire $(T_i - T_{i,v}) = R_{\text{air int-verre}} \times \Phi_{\text{th}}$. Ceci ce réécrit $\Phi_{\text{th}} = (T_i - T_{i,v})/R_{\text{air int-verre}}$.

Par identification, on en déduit que $\boxed{R_{\text{air int-verre}} = \dfrac{1}{h_i S},}$ et on obtient $\boxed{R_{\text{air int-verre}} = 0.11\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}.}$

⋆ De même pour la couche conducto-convective côté extérieur, on a $\boxed{R_{\text{air ext-verre}} = \dfrac{1}{h_e S},}$ et on obtient $\boxed{R_{\text{air ext-verre}} = 0.059\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}.}$

3 - Les trois résistances sont en série, donc elles s'ajoutent :

$$\boxed{R_{\text{tot,simple vitrage}} = R_{\text{air int-verre}} + R_v + R_{\text{air ext-verre}} = 0.17\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}.}$$

On constate que R_v est négligeable devant les résistances des transferts conducto-convectifs. Ce n'est donc pas les propriétés isolantes du verre qui servent à l'isolation, mais le fait que la paroi de verre bloque les mouvements de convection et permet la création de couches limites conducto-convectives où l'air est quasi-immobile : ces couches sont alors efficaces pour l'isolation.

Enfin, on constate que la valeur trouvée ici est proche de celle donnée par le constructeur. Notre modèle et les valeurs des coefficients retenus sont donc satisfaisants.

Double vitrage avec air

4 - **a -** Air immobile, on a donc un transfert thermique par conduction uniquement, donc l'expression précédente de la résistance thermique s'applique : $R_{\text{th}} = \dfrac{e'}{S\lambda_{\text{air}}} = 0.53\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$

b - Il faut sommer (car association série) les résistances de : la couche conducto-convective air-intérieur–verre, la première vitre, la couche d'air immobile, la seconde vitre, la couche conducto-convective verre–air-extérieur.

On trouve un résultat de $0.71\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$, ce qui n'est pas du tout en accord avec la valeur donnée par le constructeur.

Nous avons donc effectué une mauvaise hypothèse : l'air entre les deux vitres n'est pas immobile.

5 - Le flux thermique Φ_{th} traversant la couche d'air immobile est non nul (à 1D en régime stationnaire, le flux thermique est le même en tout x). En revanche la différence de température le long de cette couche est nulle.

Comme on a la relation $\Delta T = R_{\text{couche}}\Phi_{\text{th}}$, et que $\Delta T = 0$, on en déduit que $\boxed{R_{\text{couche}} = 0.}$

On ne prend donc pas en compte cette résistance dans la suite.

6 - On a des résistances en série :

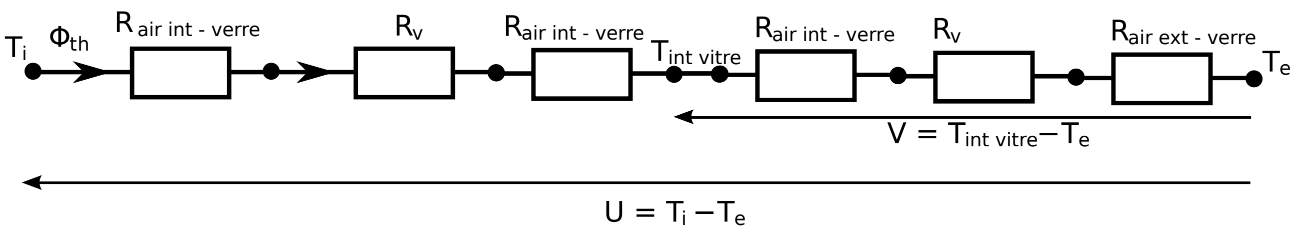
$$\boxed{R_{\text{tot,double vitrage}} = R_{\text{air int-verre}} + R_v + R_{\text{air int-verre}} + R_{\text{air int-verre}} + R_v + R_{\text{air ext-verre}} = 0.39\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}.}$$

On trouve légèrement plus que la valeur constructeur (11%), mais cela reste satisfaisant. On peut en effet noter que :

- On ne sait pas réellement à quoi correspond la valeur fabricant : à la vitre seule, ou à l'ensemble vitre+menuiserie ? Dans ce dernier cas il y a aussi des pertes par l'encadrement en bois ou en PVC, et la résistance thermique est plus faible.
- Notre modèle est discutable : pourquoi avoir considéré deux couches conducto-convectives entre les vitres et pas une seule ? (un argument en faveur des deux couches est la valeur de l'épaisseur de la couche limite, $d \sim \lambda_{\text{air}}/h_i \sim 3\,\text{mm}$, à comparer au $16\,\text{mm}$ entre les vitres). Pourquoi cette valeur là de h ?

Sans réponses à ces questions, un écart de 11% est plutôt satisfaisant.

7 - Schéma électrique équivalent :



On applique un diviseur de tension entre U et V : $V = \dfrac{R_{\text{air int-verre}} + R_v + R_{\text{air ext-verre}}}{R_{\text{tot,double vitrage}}} U$. En remplaçant $U = T_i - T_e$ et $V = T_{\text{int vitre}} - T_e$ on peut isoler $T_{\text{int vitre}}$.

On obtient alors $\boxed{T_{\text{int vitre}} = 11.6\,°\text{C}.}$

Double vitrage avec argon

8 - h étant proportionnel à λ, on a $h_{\text{argon}} = h_{\text{air}} \times \dfrac{\lambda_{\text{argon}}}{\lambda_{\text{air}}} = 0.59 h_{\text{air}} = 5.4\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

9 - Les deux résistances thermiques conducto-convectives entre le double vitrage changent, et sont multipliées par $1/0.59$.

On trouve finalement $\boxed{R_{\text{tot,double vitrage}} = 0.55\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}.}$

Ceci reste assez inférieur à la valeur constructeur de $0.83\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$. Mais cette valeur est pour un double vitrage dont le verre intérieur est traité par une couche qui réfléchit les infrarouges vers l'intérieur du logement, ce qui augmente la résistance thermique totale. Cet effet n'est pas pris en compte dans notre modèle.

Gain double vitrage / simple vitrage

10 - Notons $\alpha = 0.15$, et $a = \dfrac{R_{\text{tot,simple,vitrage}}}{R_{\text{tot,double vitrage}}} = 0.46$.

Partons d'un logement équipé en simple vitrage.

Le flux thermique total perdu par l'habitation est $\Phi_{\text{th,tot}} = \Phi_{\text{th,simples vitres}} + \Phi_{\text{th,autres}}$.

On note $b = \dfrac{\Phi_{\text{th,autres}}}{\Phi_{\text{th,simples vitres}}} = \dfrac{(1-\alpha)\Phi_{\text{th,tot}}}{\alpha\Phi_{\text{th,tot}}} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.

Changeons le vitrage pour du double vitrage.

Le flux thermique total devient $\Phi'_{\text{th,tot}} = \Phi_{\text{th,doubles vitres}} + \Phi_{\text{th,autres}} = a\Phi_{\text{th,simples vitres}} + \Phi_{\text{th,autres}}$.

On a donc $\dfrac{\Phi'_{\text{th,tot}}}{\Phi_{\text{th,tot}}} = \dfrac{a\Phi_{\text{th,simples vitres}} + \Phi_{\text{th,autres}}}{\Phi_{\text{th,simples vitres}} + \Phi_{\text{th,autres}}}$, et en divisant par $\Phi_{\text{th,simples vitres}}$ en haut et en bas on obtient :

$$\frac{\Phi'_{\text{th,tot}}}{\Phi_{\text{th,tot}}} = \frac{a+b}{1+b} = 1 - \alpha(1-a) = 0.92.$$

On a donc gagné $\alpha(1-a) = 8\%$ au niveau des pertes thermiques.

Type de vitrage	Résistance thermique donnée par le constructeur pour $S = 1.0\,\mathrm{m}^2$	Résistance thermique pour $S = 1.0\,\mathrm{m}^2$ donnée par le modèle utilisé ici
Simple vitrage 4 mm	$0.16\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$	$0.17\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$
Double vitrage 4/16/4 avec air	$0.35\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$	$0.39\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$
Double vitrage 4/16/4 avec argon et traitement spécial du verre	$0.83\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$	$0.55\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$
Double vitrage 4/16/4 avec vide d'air	$0.71\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$	$+\infty$ si vide total et pas de transfert par rayonnement