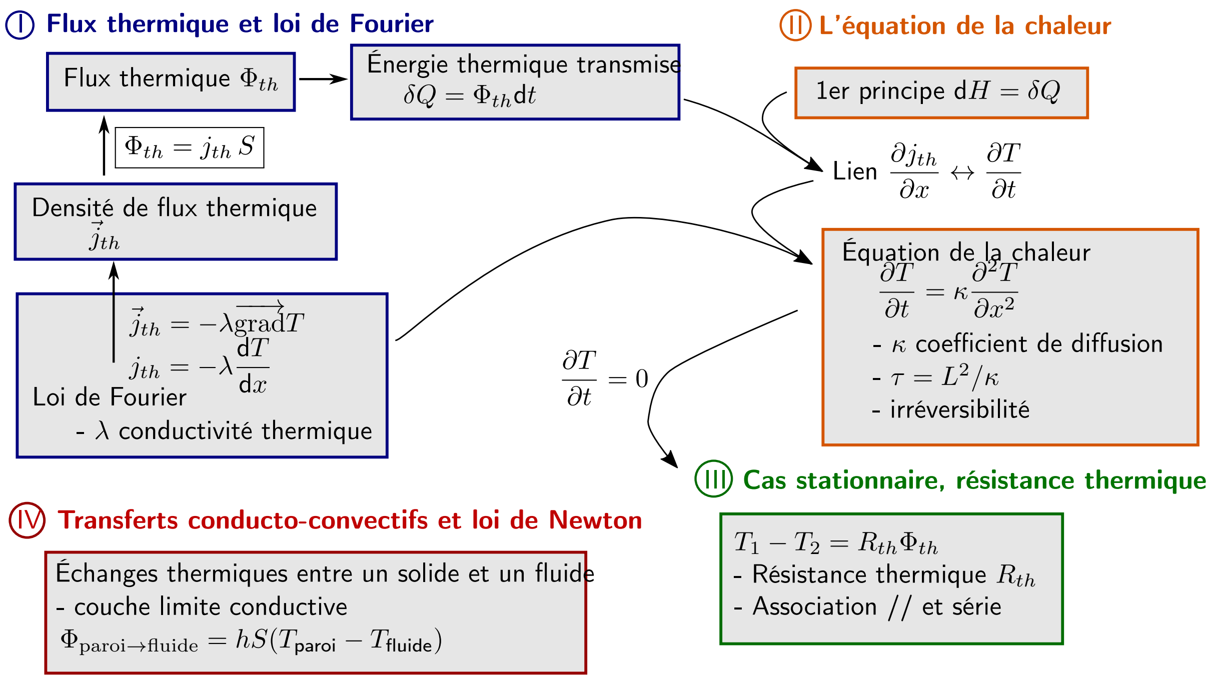
Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 6

Transferts d'énergie par conduction thermique

Plan schématique du cours



Plan du cours

Ce qu'il faut connaître

——— (cours : I)

▶1 ⋆ Quelle est la définition du flux thermique Φ_{th} (ou puissance thermique) à travers une surface S (en terme d'énergie et de temps) ?

Quel est le lien avec l'énergie thermique δQ transmise à travers une surface ?

▶2 ⋆ Quel est le lien entre flux thermique Φ_{th} et densité de flux thermique $\vec{j}_{\text{th}}$ dans le cas 1D ?

Dans le cas général (en utilisant une intégrale) ?

▶3 ⋆ Donner l'expression de la loi de Fourier dans le cas 1D. De même dans le cas général.

Interpréter l'importance du signe moins dans cette relation (penser au sens dans lequel s'effectue le transfert thermique).

▶4 Quelle est l'expression de $\overrightarrow{\text{grad}}\, T$ en coordonnées cartésiennes ?

▶5 Quels sont les ordres de grandeur des conductivités thermiques dans le domaine de l'habitat ?

——— (cours : II)

▶6 ⋆ Donner l'équation de la chaleur.

▶7 Quelle est la dimension du coefficient de diffusion thermique κ ?

——— (cours : III)

▶8 ⋆ Quelle est la définition de la résistance thermique qui fait intervenir flux thermique et différence de températures ? S'aider pour cela du schéma "électrique" correspondant.

▶9 Quelle est l'analogie entre résistance thermique et résistance électrique ?

——— (cours : IV)

▶10 ⋆ Donner la loi de Newton et les hypothèses qui permettent sa démonstration.

Ce qu'il faut savoir faire

Remarque : La liste ci-dessous comporte les savoir faire généraux, ainsi que des exemples concrets de questions qui peuvent être posées. Ces exemples ne sont pas exhaustifs : d'autres questions peuvent aussi être abordées.

——— (cours : I)

▶11 Exprimer un flux thermique Φ_{th} étant donné un profil de température $T(x)$ et la conductivité thermique.

- On considère une plaque de bois d'épaisseur $L = 10\,\text{cm}$. On donne $\lambda = 0.2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. On indique que le profil de température est affine, allant d'une température $T_c = 20\,°\text{C}$ à une température $T_f = 0\,°\text{C}$. Exprimer et calculer le transfert thermique j_{th} par unité de surface, allant de la face chaude à la face froide.[a]
- TD exercice II.

——— (cours : II)

▶12 Faire un bilan d'énergie en considérant une tranche comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$ dans un problème unidimensionnel ; en déduire une relation locale entre la température T et le vecteur densité de flux thermique j_{th} ; établir ensuite l'équation de la chaleur en utilisant la loi de Fourier (voir méthode 2).

- On considère un matériau de masse volumique μ, capacité thermique massique à pression constante c_p, conductivité thermique λ. La situation est unidimensionnelle. Le matériau est calorifugé sur les côtés, mais pas à ses extrémités.

  Établir une relation entre T et j_{th}, puis établir une équation portant sur T seulement (correction : c'est la démonstration de l'équation de la chaleur du cours).

a. Faire un schéma du profil de température. Loi de Fourier : $j_{\text{th}} = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\lambda \dfrac{T_f - T_c}{L} = 40\,\text{W/m}^2$.

– Même situation que précédemment, mais le pourtour du matériau n'est pas calorifugé : il perd une puissance thermique par unité de surface $\varphi_{th} = h(T(x,t) - T_0)$. (Voir TD exercice sur l'ailette de refroidissement).

►13 Lier le temps et la longueur caractéristique d'un phénomène de diffusion au coefficient de diffusion κ par une analyse dimensionnelle.

- On considère une barre de métal de longueur L portée à une extrémité à une température élevée. On note κ son coefficient de diffusion thermique. Comment sont reliés la longueur L et le temps τ au bout duquel l'extrémité de la barre sera chaude ? Comment évolue τ si on double la longueur de la barre ? Si on prend un matériau ayant un coefficient de diffusion deux fois moindre ? [b]

———— (cours : III)

►14 Étant donnée une situation unidimensionnelle et stationnaire, définir la résistance thermique et donner son expression.

- On considère un barreau cylindrique de longueur L et section S, calorifugé sur le pourtour et en contact à ses extrémités avec des thermostats aux températures T_1 et T_2. On suppose le régime stationnaire atteint.

  Montrer que le flux thermique au sein du barreau ne dépend pas de la position. [c]

  Définir la résistance thermique du barreau et l'exprimer en fonction de S, L, et λ. [d]

- Un composant électronique dissipe une puissance thermique $P = 1\,\mathrm{W}$. On note T sa température, $T_0 = 20°\mathrm{C}$ la température de l'air l'entourant, et R_{th} la résistance thermique entre l'air et le composant. Donner la relation entre P, T, T_0 et R_{th}.

  T ne doit pas dépasser $T_{\max} = 120°\mathrm{C}$. Donner alors la valeur maximale admissible de R_{th}. [e]

►15 En analogie avec les résistances électriques, utiliser des associations séries ou parallèles de résistances thermiques pour calculer un transfert thermique (voir méthode 1, et TD III et IV).

- On considère un mur en béton de résistance thermique $R_{th,b}$ isolé par une couche de laine de verre de résistance thermique $R_{th,lv}$, avec présence d'une fenêtre de résistance thermique $R_{th,f}$. Donner l'expression de la résistance thermique de l'ensemble. Donner l'expression du flux thermique traversant l'ensemble en fonction de la différence de température entre face intérieure et extérieure.

———— (cours : IV)

►16 Utiliser la loi de Newton pour exprimer le transfert thermique par conducto-convection entre une paroi et un fluide.

Associer une résistance thermique à un transfert conducto-convectif.

- On considère un vitrage simple de surface $S = 1.0\,\mathrm{m}^2$. On le modélise comme la succession de : un transfert conducto-convectif de coefficient $h_{\text{int}} = 9.1\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^2}$, une épaisseur de verre de $e = 4\,\mathrm{mm}$ avec $\lambda_{\text{verre}} = 1.0\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m}$, un transfert conducto-convectif de coefficient $h_{\text{int}} = 16.6\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^2}$.

  Donner l'expression et la valeur de la résistance thermique équivalente de l'ensemble.

  Donner l'expression et la valeur de la température sur la face interne de la vitre (correction : cours).

---

b. Voir cours II.4 : on a la relation $L^2/\tau = \kappa$, d'où $\tau = L^2/\kappa$. On voit que si L double, alors τ est quatre fois plus grand, etc.

c. On peut utiliser directement l'équation de la chaleur en 1D cartésien, en régime stationnaire : $T''(x) = 0$, d'où $T(x) = Ax + B$, d'où $j_{\text{th}} = -\lambda A$ constant et donc Φ_{th} aussi.

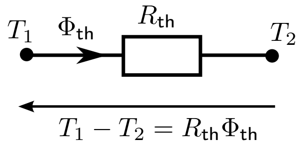
d. Passer par un schéma électrique équivalent, en convention récepteur. On doit arriver à $R_{\text{th}} = L/(\lambda S)$. Correction : exercice TD III q 1.

e. Faire un schéma "électrique" équivalent. On a $T - T_0 = P\,R_{\text{th}}$. Puis $T \leq T_{\max} \Leftrightarrow T_0 + PR_{\text{th}} \leq T_{\max}$, etc.

Méthodes

Méthode 1 : Comment utiliser la notion de résistance thermique ?

- On vérifie que le problème est stationnaire et unidimensionnel.
- On fait le schéma électrique équivalent avec les analogies :



  - flux thermique Φ_{th} $\leftrightarrow$ intensité électrique I
  - différence de température $T_1 - T_2$ $\leftrightarrow$ différence de potentiel $V_1 - V_2$.

  Bien utiliser la **convention récepteur.**
- On utilise les lois d'association en série et en parallèle des résistances.

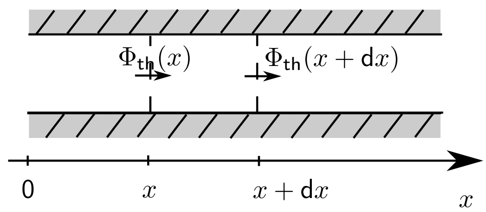
Méthode 2 : Comment déterminer l'équation différentielle sur T ?

- Vérifier que le problème est unidimensionnel. Choisir les coordonnées adaptées.
- Délimiter une tranche comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$ (ou r et $r + \mathrm{d}r$ si cylindrique ou sphérique).

  Faire un bilan d'énergie sur cette tranche :

$$\delta Q = \Phi_{\text{th,entrant}}\mathrm{d}t - \Phi_{\text{th,sortant}}\mathrm{d}t,$$

  plus éventuellement d'autres sources ou d'autres pertes (ex. : exercice ailette de refroidissement).



- Manipuler pour faire apparaître des termes du type $\Phi_{\text{th}}(x + \mathrm{d}x) - \Phi_{\text{th}}(x)$, à remplacer par $\dfrac{\partial \Phi_{th}}{\partial x}\mathrm{d}x$.
-
  - Si on est en régime stationnaire : $\delta Q = 0$. On en déduit facilement Φ_{th}, puis j_{th}, puis $T(x)$ avec la loi de Fourier (ex. : c'est ce que l'on fait pour établir l'expression de la résistance thermique R_{th}).
  - Sinon : on utilise le premier principe $(\mathrm{d}m)c_p\mathrm{d}T = \mathrm{d}H = \delta Q$ pour aboutir à une relation entre $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial \Phi_{th}}{\partial x}$, puis on relie Φ_{th} à j_{th} et à $T(x)$ avec la loi de Fourier. Puis avec la loi de Fourier on aboutit à l'équation de la chaleur.

Rappels sur les modes de transfert d'énergie thermique

On distingue trois grands types de transfert thermique :

- **Les transferts thermiques par conduction** (aussi appelés par diffusion). Ils se font dans un milieu matériel, et sans mouvement macroscopique de matière. Ils sont assurés par des transferts d'énergie entre molécules ou atomes à l'échelle microscopique (les zones chaudes contiennent des molécules qui rapides (agitation thermique élevée) qui transfèrent leur énergie, via des collisions, aux molécules plus lentes des zones froides).

  Exemple : Un ustensile de cuisine dont on place une extrémité dans une casserole chaude finit par être chaud de part en part.

- **Les transferts thermiques par convection.** Ils se font dans un milieu matériel, et grâce à des mouvements macroscopiques de matière.

  Exemple : Aérer une habitation en hiver en ouvrant les fenêtres entraîne un refroidissement. L'air froid de l'extérieur remplace l'air chaud par des mouvements de convection (des "courants d'air" ici).

  Remarque : Lorsqu'il y a présence à la fois de conduction et de convection (donc lorsque la matière peut être mise en mouvement : dans les liquides ou les gaz), c'est généralement la convection qui réalise le transfert le plus efficace. En revanche dans les solides seul le transfert par conduction est possible.

- **Les transferts thermiques par rayonnement.** Il s'agit d'énergie transportée par le rayonnement électromagnétique, et transmis à la matière qui le reçoit lors de l'absorption du rayonnement. Il peut s'effectuer dans le vide.

  Exemple : Le Soleil nous chauffe par rayonnement. De même, une grande partie de la chaleur transmise par un feu de cheminée se fait par rayonnement.

Documents associés au cours

Matériau	Conductivité thermique λ ($\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$)	Diffusivité κ ($\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$)
Métal bon conducteur (ici cuivre)	400	1.2×10^{-4}
Acier	50	$\sim 4\times10^{-6}$
Béton	$1-2$	$\sim 5\times10^{-7}$
Verre	$1-1.5$	$\sim 5\times10^{-7}$
Eau immobile	0.6	1×10^{-7}
Bois	$0.1-0.3$	
Laine de verre	0.04	6×10^{-7}
Air immobile (T et p usuelles)	0.03	2×10^{-5}
Polystyrène expansé	0.004	

Table : Conductivité thermique λ et diffusivité thermique κ pour des matériaux ou fluides courants.
Attention, l'air et l'eau étant des fluides les transferts par convection sont possibles, et souvent beaucoup plus efficaces que les transferts par conduction.
Enfin, λ et D dépendent de la température et de la pression, mais assez faiblement pour que ceci puisse être négligé pour nos applications.

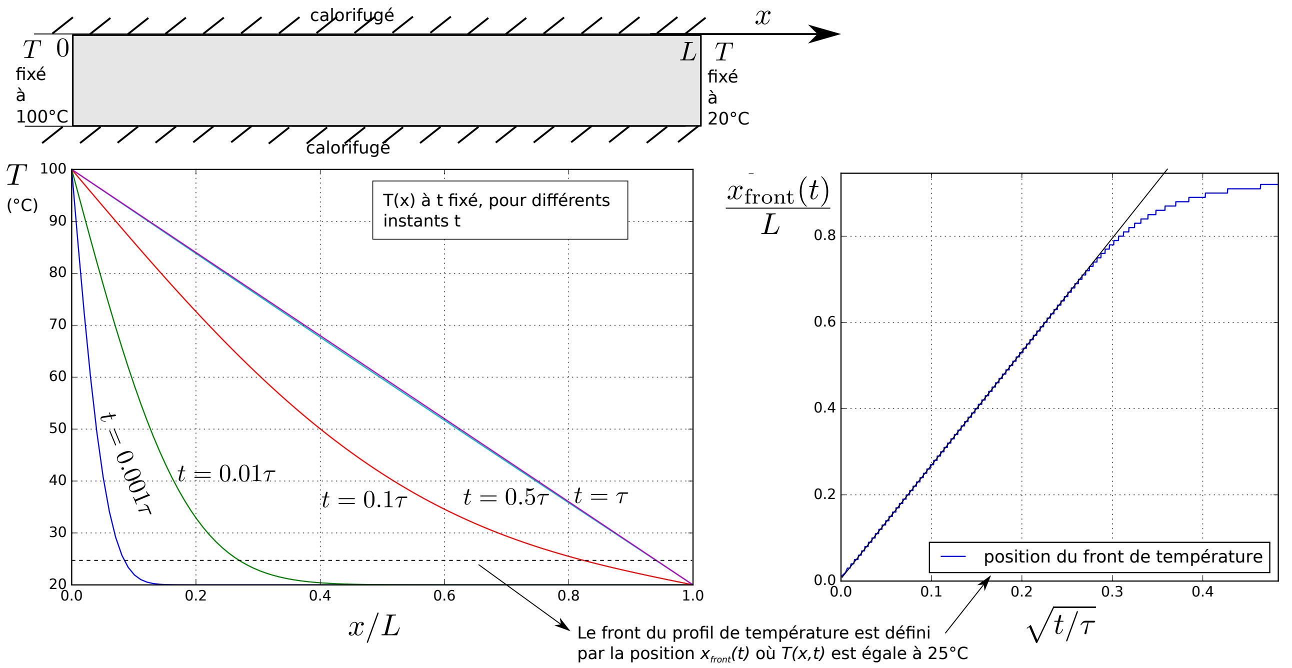


Figure 1 : Résolution numérique de l'équation de la chaleur dans une barre de matériau uniforme, avec températures imposées à $T_c = 100\,°\text{C}$ à gauche et $T_f = 20\,°\text{C}$ à droite. Initialement, $T(x,0) = 20\,°\text{C}$.

On a posé $\tau = \dfrac{L^2}{\kappa}$. Par exemple pour une barre de longueur $L = 1$ m en cuivre, on a $\tau = 2$ h et 19 min.

On observe le front de température se propager depuis la zone où est imposée $T = 100\,°\text{C}$. La figure de droite montre que ce front de température avance de façon proportionnelle à $\sqrt{t}$, comme expliqué dans le cours. (Ce n'est toutefois plus le cas lorsque le front est trop proche du bord droit de la barre à cause d'effet de bords.)

Résolution numérique effectuée avec Python, avec un schéma d'Euler explicite en temps.

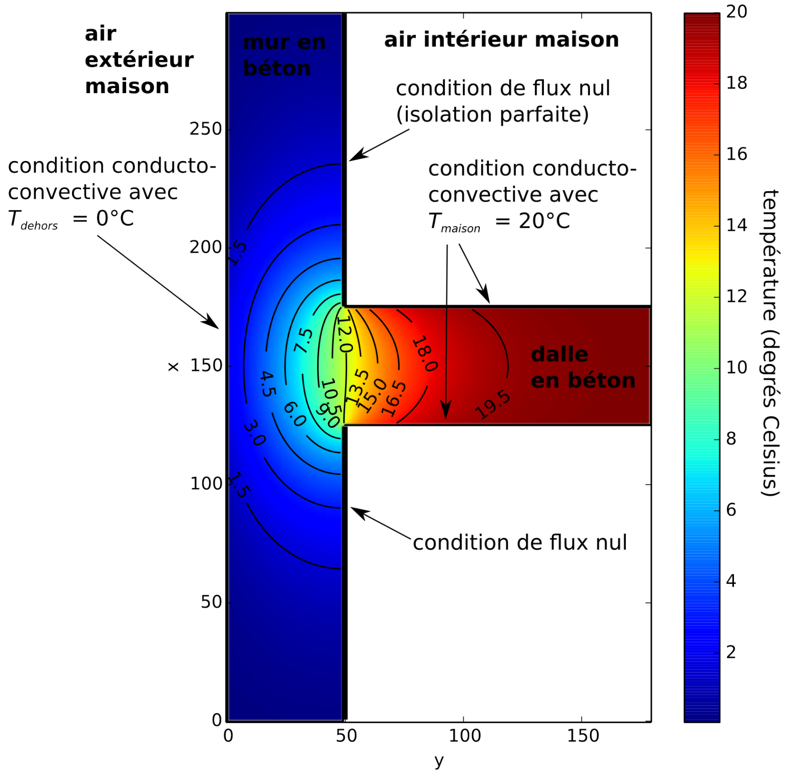


Figure 2 : Résolution numérique de l'équation de la chaleur en régime stationnaire ($\Delta T = 0$) pour trouver le champ de température dans une dalle en béton + mur en béton avec un extérieur froid. Ceci met en évidence l'effet de "pont thermique" : la température de la dalle dans les coin est faible, l'isolation est donc mauvaise. Il est donc avantageux d'isoler les maison du côté extérieur.

Résolution effectuée avec Python. Nous verrons plus tard dans l'année comment résoudre numériquement une équation du type $\Delta T = 0$ en deux dimensions.