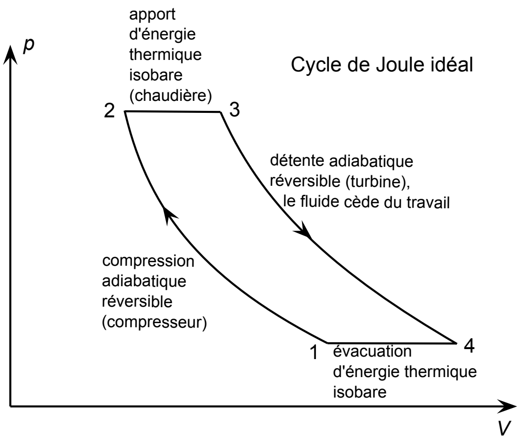
Correction – DM 9

1 - Voir ci-contre pour l'allure du cycle.

Il est normal que :

- les sens de parcours du cycle sont les mêmes dans les diagrammes T-s et p-v ;
- le cycle est effectué dans le sens horaire, ce qui correspond à une machine motrice (et l'objectif de la turbine à gaz est bien de produire du travail).



2 - a - Système *ouvert* : échangeur de chaleur (celui de l'étape $2 \to 3$).
Transformation isobare et réversible :

$$\text{en entrée} \left| \begin{array}{l} T_2 \\ p_2 \end{array} \right. \quad \to \quad \text{en sortie} \left| \begin{array}{l} T_3 \\ p_3 = p_2 \text{ car isobare} \end{array} \right.$$

On applique le premier principe pour un système ouvert :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = w_i + q.$$

⋆ Ici on néglige la variation d'énergie cinétique et la variation d'altitude entre entrée et sortie : $\Delta e_c = \Delta(gz) = 0$.
⋆ Il n'y a pas de parties mobiles dans l'échangeur thermique, donc $w_i = 0$.
⋆ L'air est modélisé comme un gaz parfait, on a donc $\Delta h = c_p(T_3 - T_2)$.
Donc finalement :

$$\boxed{q_{23} = c_p(T_3 - T_2).}$$

Avec le même raisonnement pour l'étape $4 \to 1$, on montre que

$$\boxed{q_{41} = c_p(T_1 - T_4).}$$

b - Système *ouvert* : compresseur.
Transformation adiabatique et réversible :

$$\text{en entrée} \left| \begin{array}{l} T_1 \\ p_1 \end{array} \right. \quad \to \quad \text{en sortie} \left| \begin{array}{l} T_2 \\ p_2 \end{array} \right.$$

On applique ensuite le premier principe pour un système ouvert comme à la question précédente, sauf que cette fois-ci $q = 0$ car le compresseur est calorifugé, et $w_{12} \neq 0$. On arrive à :

$$\boxed{w_{12} = c_p(T_2 - T_1).}$$

c - De la même façon qu'à la question précédente, mais en appliquant le premier principe pour le système ouvert “turbine”, on aboutit à

$$\boxed{w_{34} = c_p(T_4 - T_3).}$$

d - Le travail massique indiqué $w_{12} + w_{34}$ est par définition le travail massique **reçu par le fluide**. C'est donc $-(w_{12} + w_{34})$ qui est cédé au milieu extérieur. Donc

$$\boxed{w_{\text{net}} = -(w_{12} + w_{34}) = c_p(T_3 - T_4 + T_1 - T_2).}$$

Remarque : On a $-w_{34} > 0$ car c'est le travail produit par la turbine vers le milieu extérieur, alors que $-w_{12} < 0$ car $w_{12} > 0$ car le fluide reçoit un travail de la part du compresseur. Globalement, $w_{\text{net}} > 0$ car la machine est faite pour fournir un travail au milieu extérieur.

Expression du rendement et optimisation

3 - a - Grandeur utile : w_{net}, grandeur coûteuse : transfert thermique fourni par la chaudière, donc q_{23}.

$$\text{On a donc} \quad \boxed{\eta = \frac{w_{\text{net}}}{q_{23}} = \frac{T_3 - T_4 + T_1 - T_2}{T_3 - T_2}.}$$

b - Montrons d'abord que l'on a $T_2T_4 = T_1T_3$.
Les évolutions $1 \to 2$ et $3 \to 4$ sont adiabatiques réversibles, et concernent un gaz parfait. On a donc les relations de Laplace [1] :

$$p_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma}T_2^\gamma \quad \text{et} \quad p_4^{1-\gamma}T_4^\gamma = p_3^{1-\gamma}T_3^\gamma.$$

Or on a $p_2 = p_3$ et $p_1 = p_4$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} p_1^{1-\gamma}T_1^\gamma &= p_2^{1-\gamma}T_2^\gamma \\ p_1^{1-\gamma}T_4^\gamma &= p_2^{1-\gamma}T_3^\gamma. \end{aligned}$$

En effectuant le rapport de ces deux équations, on voit que l'on a $\dfrac{T_1}{T_4} = \dfrac{T_2}{T_3}$, soit encore

$$\boxed{T_2T_4 = T_1T_3.}$$

On a alors :

$$\eta = \frac{T_3 - T_4 + T_1 - T_2}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}\,\frac{T_4T_2 - T_1T_2}{T_3T_1 - T_2T_1} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \text{car } T_2T_4 = T_1T_3.$$

$$\text{On a donc bien} \quad \boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}.}$$

4 - a - On a écrit précédemment que $p_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma}T_2^\gamma$. On a donc $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, d'où

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{z} \quad \text{avec} \quad z = \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.}$$

b - Le rendement augmente si le rapport de compression augmente, ou si γ augmente.
Il faudra toutefois veiller à ne pas atteindre des températures trop élevées qui pourraient endommager les matériaux utilisés. Il faudra également faire en sorte de minimiser les sources d'irréversibilité, qui ont pour conséquences de faire diminuer le rendement (que l'on a calculé ici dans le cas réversible).

5 - a - Avec $z = 2$ on a $\boxed{\eta = 0.5}$ et un travail massique récupéré $\boxed{w_{\text{net}} = 2.0 \times 10^5\,\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}}$.
Si le débit massique est $D_m = 1.0\,\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$, alors la puissance fournie par la machine est

$$\boxed{\Psi_{\text{net}} = D_m\, w_{\text{net}} = 0.2\,\text{MW}.}$$

Une telle puissance correspond à une installation de taille modeste (à comparer à une turbine de 300 MW dans une centrale nucléaire).

6 - On a $w_{\text{net}} = c_p(T_3 - T_4 + T_1 - T_2)$. On travaille à T_1 et T_3 fixées, donc on exprime tout en fonction de ces deux températures :

$$w_{\text{net}} = c_p\left(T_3 - \frac{1}{z}T_3 + T_1 - zT_1\right).$$

On a donc une fonction $w_{\text{net}}(z)$, et on cherche son maximum. On cherche donc quand la dérivée par rapport à z s'annule :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}w_{\text{net}}(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z^2}T_3 - T_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}} = 1.83.}$$

Remarque : Le travail récupéré est alors maximal, mais pas nécessairement le rendement car q_{23} n'est pas fixé dans cette analyse.

1. Si on ne se souvient pas de cette version de la loi de Laplace, on la redémontre en utilisant $pV = nRT$ et constante $= pV^\gamma = p(nRT/p)^\gamma = (nR)^\gamma \times p^{1-\gamma}T^\gamma$ et on absorbe nR dans la constante, car il est constant.