Correction – DM 7 – Thermodynamique et autres révisions

I Thermodynamique : étude du cycle de Rankine

Extrait de CCP TSI 2012.

1. Voir document 1.

2. Pour le point 3 : on connaît $T_3 = 500°\text{C}$, et on sait en plus que l'évolution 2→3 est isobare, donc $p_3 = p_2 = 50\,\text{bar}$. Ceci permet de placer le point 3.

Pour tracer toute l'évolution 2→3, on suit l'isobare $p = 50\,\text{bar}$.

Pour le point 4, on sait que 3→4 est isentropique. En partant de l'état 3 sur le diagramme, on doit descendre en ligne droite. On s'arrête lorsqu'on est à la température T_1, car on sait qu'on doit ensuite aller de 4 à 1 à l'aide d'un changement d'état isobare isotherme.

3. On lit : $T_1 = 100°\text{C}$, $h_3 \simeq 3.5 \times 10^3\,\text{kJ/kg}$, $h_4 = 2.6 \times 10^3\,\text{kJ/kg}$, $s_4 = 7.0\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $s_v(T_1) = 7.38\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $s_l(T_1) = 1.35\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

4. L'entropie massique étant une grandeur extensive, on a : $s_4 = x_4 s_v(T_4) + (1 - x_4)s_l(T_4)$ (x_4 est le titre vapeur, $1 - x_4$ est le titre en liquide). Comme $T_4 = T_1$, on a aussi $s_4 = x_4 s_v(T_1) + (1 - x_4)s_l(T_1)$. On en déduit

$$\boxed{x_4 = \frac{s_4 - s_l(T_1)}{s_v(T_1) - s_l(T_1)},} \quad \text{d'où} \quad \boxed{x_4 = 0.94.}$$

5. Comme dans le GV le travail indiqué est nul, on a d'après le premier principe appliqué au système ouvert "fluide" entre les états 2 et 3 : $\Delta h = q_{\text{GV}}$. Donc

$$\boxed{q_{\text{GV}} = h_3 - h_2 = 3025\,\text{kJ/kg}.}$$

6. De même, on a

$$\boxed{q_{\text{cond}} = h_1 - h_4 = -2160\,\text{kJ/kg}.}$$

7. Système (fermé) : masse m de fluide caloporteur en circulation dans la machine thermique.

Transformation : un cycle.

On applique le premier principe sur un cycle au fluide caloporteur : $\Delta U = W + Q$.

On a $\Delta U = 0$ car U est une fonction d'état et il s'agit d'un fluide. On a $Q = Q_{\text{GV}} + Q_{\text{cond}}$ car dans les autres étapes il n'y a pas d'échange d'énergie thermique.

Comme par définition $Q_{\text{GV}} = m\,q_{\text{GV}}$ et $Q_{\text{cond}} = m\,q_{\text{cond}}$, on en déduit finalement

$$\boxed{W = -m(q_{\text{GV}} + q_{\text{cond}}).}$$

8. Le rendement η du cycle est $\eta = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur coûteuse}}$.

- La grandeur utile est le travail récupéré au cours du cycle : W.

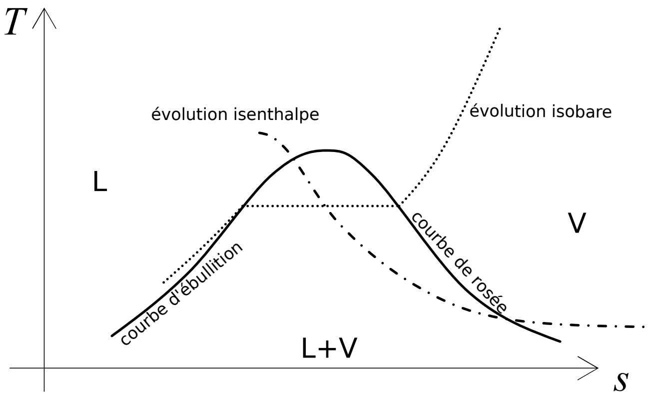
- La grandeur coûteuse est la chaleur que l'on fournit dans le GV (c'est là que l'on chauffe pour faire fonctionner la machine) : Q_{GV}.

Donc $\eta = \dfrac{-W}{Q_{\text{GV}}} = \dfrac{m(q_{\text{GV}} + q_{\text{cond}})}{Q_{\text{GV}}}$,

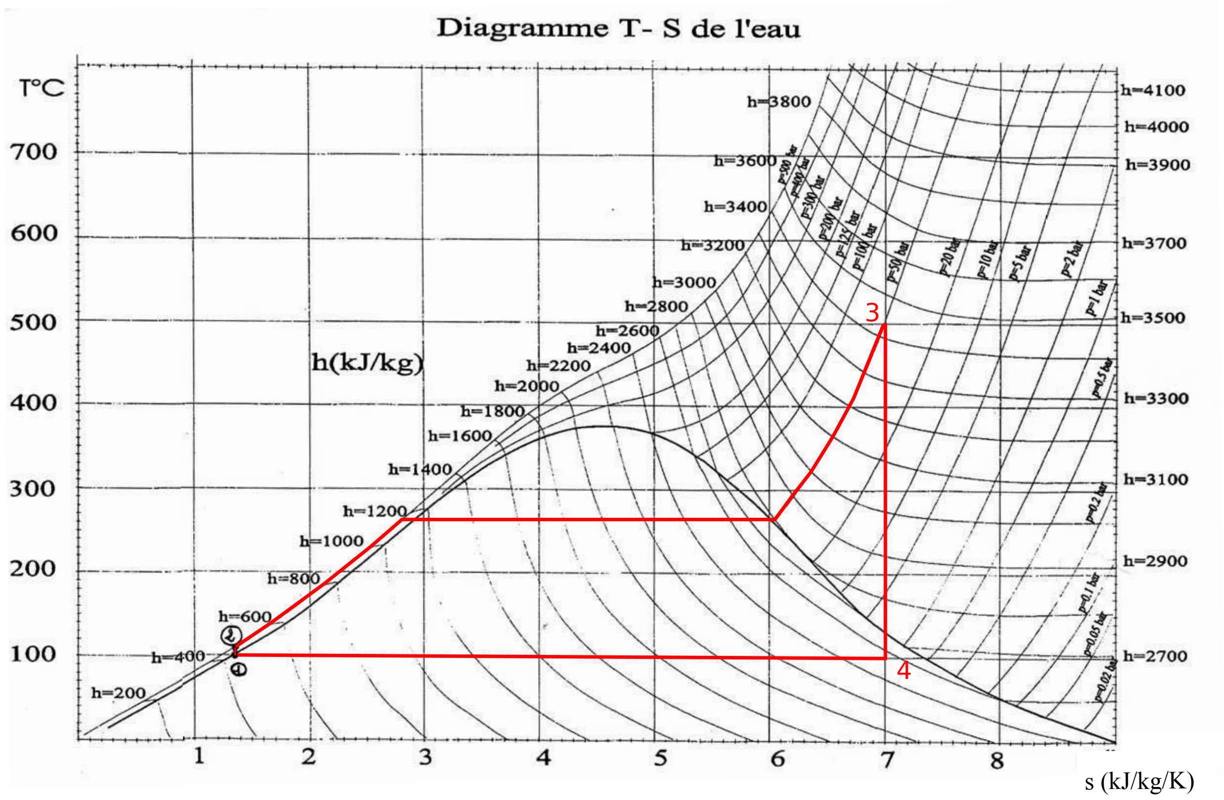
$$\text{d'où} \quad \boxed{\eta = 1 + \frac{q_{\text{cond}}}{q_{\text{GV}}},} \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta = 0.3.}$$

9. Si on estime que le sous-marin a besoin d'une puissance motrice $|P| = 60\,\text{MW}$ sur l'arbre en sortie de la turbine, alors la puissance thermique apportée par le réacteur nucléaire doit être

$$\boxed{P_{\text{GV}} = |P|/\eta = 0.2\,\text{GW}.}$$



(doc. 1)



(doc. 2) Tracé du cycle sur le diagramme T-s.

II Révisions de mécanique : mesure de la pesanteur

Extrait et adapté de CCP TSI 2010.

II.1 Questions introductives

1. **a -** Le moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) d'un point de masse m distant de r de l'axe (Oz) est $J_{(Oz)} = mr^2$.
Si on note $\mathrm{d}m$ la masse du point, le moment d'inertie associé est $\mathrm{d}J = \mathrm{d}m\, r^2$.
Pour un solide, découpe le solide en élément infinitésimaux de masse $\mathrm{d}m$, et on somme les moments d'inertie :
$$J_{(Oz)} = \int_{M\in\text{solide}} \mathrm{d}J = \int_{M\in\text{solide}} r^2 \mathrm{d}m. \tag{1}$$
L'an dernier vous aviez vu la relation $J_{(Oz)} = \sum_i m_i r_i^2$, mais la définition avec l'intégrale est plus rigoureuse.
Vue la définition, l'unité de $J_{(Oz)}$ est le $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.
b - Le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse du solide est élevée et qu'elle est répartie loin de l'axe considéré.
Ici on a donc $J_{(Oz),2} < J_{(Oz),1} = J_{(Oz),3} < J_{(Oz),4}$.

2. Pour un solide en rotation autour d'un axe (Oz) fixe à la vitesse angulaire $\dot\theta(t)$, dans un référentiel galiléen, et soumis à des forces $\vec{F}_i$, on a :

$$\boxed{J_{(Oz)}\frac{\mathrm{d}\dot\theta}{\mathrm{d}t} = \sum_i M_{(Oz)}(\vec{F}_i),}$$

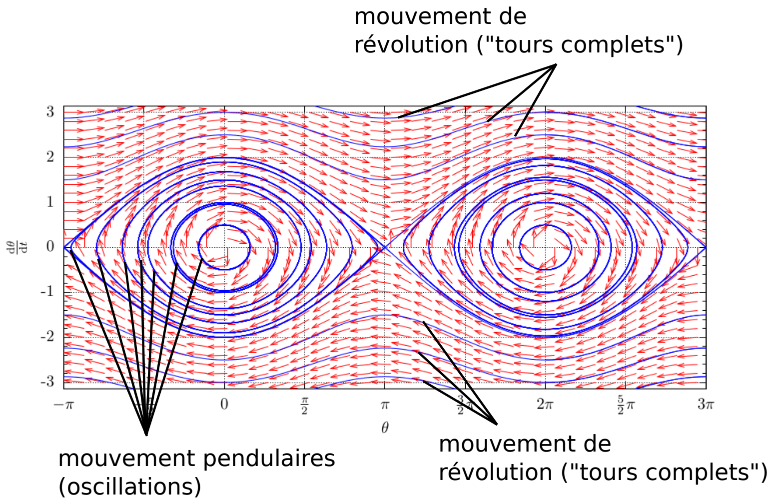
avec $M_{(Oz)}(\vec{F}_i)$ le moment de la force $\vec{F}_i$ selon l'axe (Oz). On peut aussi écrire $\frac{\mathrm{d}\dot\theta}{\mathrm{d}t} = \ddot\theta$.

II.2 Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

3. La trajectoire d'un point quelconque de ce pendule est un arc de cercle dont le centre est sur l'axe (Oz).

On a $v = \dot\theta\, OM$.

4. Voir ci-contre. Il n'est pas nécessaire de tracer les flèches. On rappelle aussi que le portrait de phase représente les trajectoires dans le plan $(\theta, \dot\theta)$, et qu'il est périodique dans la direction θ de période 2π.



5. **a -** ⋆ Système : solide de masse m et de moment d'inertie J par rapport à (Oz).

⋆ Référentiel : terrestre supposé galiléen.

⋆ Bilan des actions s'exerçant sur le solide et expression de leur moment selon l'axe (Oz) :

- Action de la liaison pivot, de moment nul car on néglige tout frottement.
- Action du poids, de résultante $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$ au point G.
  Le bras de levier de cette force est $a\sin\theta$. Tel que sur le dessin de l'énoncé où on a bien $\theta > 0$, $\vec{P}$ tend à faire tourner le solide dans le sens qui est contraire à celui de (Oz) d'après la règle du tire-bouchon (ou de la main droite), donc dans ce cas là le moment est négatif.
  On a donc $M_{(Oz)}(\vec{P}) = -a\sin\theta \times mg = -mga\sin\theta$.

⋆ Le moment cinétique s'exprime comme $L_{(Oz)} = J\dot\theta$.

⋆ D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}L_{(Oz)}}{\mathrm{d}t} = M_{(Oz)}(\vec{P}), \qquad \text{d'où } \boxed{J\ddot\theta = -mga\sin\theta}. \tag{2}$$

Remarque : On peut aussi calculer le moment de $\vec{P}$ de façon plus mathématique : $M_{(Oz)}(\vec{P}) = [\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}]\cdot\vec{e}_z = [(a\cos\theta\vec{e}_x + a\sin\theta\vec{e}_y)\wedge mg\vec{e}_x]\cdot\vec{e}_z = mga[\sin\theta\,\vec{e}_y\wedge\vec{e}_x]\cdot\vec{e}_z = mga[\sin\theta\,(-\vec{e}_z)]\cdot\vec{e}_z = -mga\sin\theta$.

b - Pour $\theta \ll 1$, on a $\sin\theta \sim \theta$, l'équation précédente devient donc $J\ddot\theta = -mga\theta$, soit sous forme canonique : $\boxed{\ddot\theta + \frac{mga}{J}\theta}$.

On reconnaît une équation du type oscillateur harmonique, de pulsation $\omega^2 = \frac{mga}{J}$, et donc de période $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}}$.

6. **a -** On a

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg'a}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m(g+\Delta g)a}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg(1+\frac{\Delta g}{g})a}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}\left(1+\frac{\Delta g}{g}\right)^{-1/2}.$$

On a bien quelque chose de la forme $(1+\epsilon)^\alpha$, qui est équivalent à $\simeq 1 + \alpha\epsilon$ pour ϵ petit.

Donc $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}\right)$.

On reconnaît $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}$ dans cette expression, d'où : $\boxed{T' = T\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}\right)}$.

b - La sensibilité est $s = \dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{T' - T}{T} = \dfrac{T\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\right) - T}{T}$,

$$\text{d'où } \boxed{s = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}}.$$

II.3 Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

7. a - Pour un point matériel de masse m, le travail de la force de pesanteur $\vec{F} = m\vec{g}$ pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}x\,\vec{e}_x$ est

$$\delta W = m\vec{g}\cdot\mathrm{d}x\,\vec{e}_x = -mg\vec{e}_x\cdot\mathrm{d}x\,\vec{e}_x, \quad \text{soit } \boxed{\delta W = -mg\mathrm{d}x}.$$

b - L'énergie potentielle de pesanteur $E_{\mathrm{p,pes}}$ est telle que

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p,pes}} = -\delta W = mg\mathrm{d}x, \quad \text{d'où } \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p,pes}}}{\mathrm{d}x} = mg, \quad \text{d'où } \boxed{E_{\mathrm{p,pes}} = mgx + C}.$$

c - Dans le cas d'un solide, x doit désigner l'altitude du centre de masse du solide. Il s'agit donc ici de G. On a donc $x = x_G = a\cos\theta$. En choisissant la constante nulle, on obtient $\boxed{E_{\mathrm{p,pes}} = mga\cos\theta}$.

8. a - L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Oz fixe est $E_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$, avec J le moment d'inertie autour de l'axe Oz.
On a donc ici

$$\boxed{E_m = E_c + E_{\mathrm{p,pes}} + E_{\mathrm{p,ressort}} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta + \frac{1}{2}K\theta^2.}$$

b - Les forces qui s'exercent sur le pendule sont le poids et l'action du ressort, qui sont conservatives, et l'action de liaison en O, qui est supposée parfaite et donc ne travaille pas. En conséquence, l'énergie mécanique se conserve : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$.
On a donc, en dérivant l'équation précédente par rapport au temps :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}^2 + mga\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\theta + \frac{1}{2}K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta^2 \\ &= \frac{1}{2}J\,2\ddot{\theta}\dot{\theta} - mga\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}K\,2\dot{\theta}\theta, \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \boxed{\ddot{\theta} - \frac{mga}{J}\sin\theta + \frac{K}{J}\theta = 0.}$$

9. a - Pour θ petit, on a $\sin\theta \sim \theta$, et l'équation du mouvement devient donc

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{K - mga}{J}\right)\theta = 0.$$

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique, de pulsation $\omega^2 = \dfrac{K - mga}{J}$, à condition d'avoir $\dfrac{K - mga}{J} > 0$, et donc d'avoir $\boxed{K > mga}$.

b - On vient de montrer que la pulsation est $\omega^2 = \dfrac{K - mga}{J}$, donc la période des oscillations est $T = 2\pi/\omega$, soit

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K - mga}}.}$$

10.

11. **a -**

$$\begin{aligned}\frac{1}{T^2}-\frac{1}{T'^2} &= \frac{1}{T^2}-\frac{1}{(T+\Delta T)^2}\\ &= \frac{1}{T^2}-\frac{1}{T^2}\frac{1}{\left(1+\dfrac{\Delta T}{T}\right)^2}\\ &= \frac{1}{T^2}-\frac{1}{T^2}\left(1-2\frac{\Delta T}{T}\right) \quad \text{(développement limité car } \Delta T \ll T)\\ &= \boxed{-2\frac{\Delta T}{T^3}}\end{aligned}$$

b - On a $\dfrac{1}{T^2}=\dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{K-mag}{J}$, et donc $\dfrac{1}{T'^2}=\dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{K-mag-ma\Delta g}{J}$.

$$\text{Donc : } \boxed{\frac{1}{T^2}-\frac{1}{T'^2}=\frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J}.}$$

c - On combine les résultats des deux questions précédentes :

$$s_1=\frac{\Delta T}{T}=-\frac{T^2}{2}\frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J},$$

$$\text{soit } \boxed{s_1=\frac{ma\Delta g}{2(K-mga)}}$$

12. On veut que $|s_1|>|s|$, soit $\dfrac{ma|\Delta g|}{2(K-mga)}>\dfrac{|\Delta g|}{2g}$, ce qui est possible si

$$\text{soit } \boxed{2mag>K.}$$

III Révisions de chimie

1. $^{35}_{17}Cl$ Noyau : 35 nucléons, dont 17 protons et $35-17=18$ neutrons. L'atome étant neutre, le nuage électronique possède 17 électrons.

2. On utilise les règles de remplissage (en s'aidant du diagramme en triangle) : $\boxed{1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5}$.

3. L'ion monoatomique le plus stable formé par cet élément sera celui qui permet de remplir la sous-couche 3p, il s'agit donc de $\boxed{Cl^-}$, de structure électronique $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$.

4. On raisonne sur l'ion chlorure. Ceux au centre des faces comptent pour 1/2, et ceux aux coins comptent pour 1/8, donc par maille il y en a : $6\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{8}=\boxed{4}$.

   Concernant l'ion sodium, il y en a 1 au centre et 12 sur les arrêtes comptant chacun pour 1/4, donc dans une maille : $1+12\times\frac{1}{4}=\boxed{4}$.

5. La formule chimique de ce cristal est donc <u>NaCl</u> (autant d'atomes de chaque par maille).

6. L'ion chlore est Cl^-. Par électroneutralité, et étant donnée qu'il y a autant de Na que de Cl par maille, la charge de l'ion Na est nécessairement +1. Donc $\boxed{Na^+}$.

   L'ion sodium est dans la première colonne de la classification, donc dans la famille des <u>alcalins</u>.

7. Les anions et cations sont toujours en contact. Ici le contact s'effectue le long d'une arrête. On a donc $a=2r_{Cl}+2r_{Na}$. On peut donc en déduire la somme des deux rayons, mais pas la valeur de chacun d'entre eux.