

DM 4 – Correction

Calcul du champ de pression dans un gaz parfait non isotherme

- 1 - Voir la démonstration du cours. On aboutit à $p(z) = p_0 \exp(-z/H)$ avec $p_0 = 1.0$ bar et une valeur numérique pour H de 8.6 km.
- 2 - Pour $z = 1$ km : $p = 0.89$ bar. Pour $z = 8.8848$ km : $p = 0.36$ bar.
- 3 - On voit sur le graphique que la température n'est pas uniforme dans la troposphère, mais qu'elle varie linéairement. L'hypothèse isotherme n'est donc pas valide.
On peut s'attendre à ce qu'elle donne des résultats corrects pour des altitudes faibles où la température n'a pas encore trop varié, mais pas pour des altitudes élevées.

- 4 - On prend $T_0 = 287$ K, et $\lambda = \left| \frac{T(22\text{km}) - T(0\text{km})}{22\text{km} - 0\text{km}} \right| = 6.2 \times 10^{-3}$ K/m, soit une décroissance de la température de 6.2°C tous les 1000 m. (Pour λ il fallait faire attention au fait que vu la loi $T = T_0 - \lambda z$, λ est l'accroissement des T divisé par l'accroissement des z .)

- 5 - On procède comme à la question 1, sauf que l'on remplace T_0 par l'expression pour $T(z)$:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g = -\left(\frac{p(z)M}{RT(z)}\right)g = -\left(\frac{p(z)M}{R(T_0 - \lambda z)}\right)g.$$

- 6 - On prend l'expression fournie dans l'énoncé pour $p(z)$, c'est-à-dire $p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^\alpha$, et on calcule sa

$$\text{dérivée : } \frac{dp}{dz} = \alpha \times \left(\frac{-\lambda}{T_0}\right) \times p_0 \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{\alpha-1}.$$

On calcule également ce que vaut le membre de droite de l'équation (1) du sujet avec l'expression de $p(z)$ fournie : $-p(z)\frac{Mg}{R(T_0 - \lambda z)} = -p_0 \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^\alpha \times \frac{Mg}{R(T_0 - \lambda z)} = -\frac{p_0 Mg}{RT_0} \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{\alpha-1}$.

On voit que pour que ces deux termes soient égaux, il faut avoir $\frac{p_0 Mg}{RT_0} = \alpha \frac{\lambda}{T_0} p_0$, et donc qu'il faut poser

$$\alpha = \frac{Mg}{\lambda R}. \text{ L'application numérique donne } \alpha = 5.52.$$

- 7 - Pour $z = 1$ km : $p = 0.89$ bar, il n'y a donc pas de différence avec le modèle isotherme (la différence est noyée dans les chiffres significatifs).

Pour $z = 8848$ m : $p = 0.31$ bar, soit une différence de $\frac{0.36 - 0.31}{0.36} = 14\%$ avec le modèle isotherme. La différence commence donc à être importante, en particulier si on veut une estimation précise.

Le modèle isotherme fournit donc des résultats identiques au modèle non isotherme pour les 1000 premiers mètres (et même en réalité pour les 3 ou 4000 premiers mètres). Il est donc suffisant.

- 8 - On part directement du deuxième point : on montre en effet facilement qu'on arrive à $\int_{p=p_0}^{p=p(z_1)} \frac{dp}{p} =$

$$\int_0^{z_1} -\frac{Mg}{R} \frac{dz}{T_0 - \lambda z}.$$

$$\text{Le membre de droite vaut : } \int_{p=p_0}^{p=p(z_1)} \frac{dp}{p} = \int_{p=p_0}^{p=p(z_1)} d(\ln p) = \ln \frac{p(z_1)}{p_0}.$$

$$\text{Le membre de gauche vaut : } \int_0^{z_1} -\frac{Mg}{R} \frac{dz}{T_0 - \lambda z} = -\frac{Mg}{R} \int_0^{z_1} \frac{dz}{T_0 - \lambda z} = -\frac{Mg}{R} \left[-\frac{1}{\lambda} \ln(T_0 - \lambda z) \right]_0^{z_1} =$$

$$\frac{Mg}{\lambda R} \ln \left(\frac{T_0 - \lambda z_1}{T_0} \right) = \ln \left(\frac{T_0 - \lambda z_1}{T_0} \right) \frac{Mg}{\lambda R}.$$

On a égalité des deux membres. On peut passer à l'exponentielle et donc enlever les ln. On obtient donc

$$\text{bien } \frac{p(z_1)}{p_0} = \left(\frac{T_0 - \lambda z_1}{T_0} \right) \frac{Mg}{\lambda R}, \text{ ce qui est ce qui était proposé dans l'énoncé.}$$

Grille d'évaluation – DS / DM

Les deux tableaux ci-dessous n'interviennent pas dans la note finale, celle-ci étant calculée de façon classique à l'aide d'un barème. L'intérêt de ces tableaux est plutôt de vous indiquer votre niveau sur certaines compétences qui sont *communes* et *essentielles* pour tous les DS et DM. Un C ou un D signifie que vous devez réagir sur le point en question.

Enfin, même si ces compétences n'interviennent pas explicitement dans la note, il y a évidemment une corrélation entre le nombre de A, de B, de C ou de D et la note chiffrée finale.

Compétence	A	B	C	D	Remarques
Maîtriser les connaissances et savoir-faire du cours					

Capacité		A	B	C	D	Remarques
Réaliser	Écrire ou utiliser les données numériques (applications numériques, chiffres significatifs, unités, conversions si besoin...)					
	Maîtrise des outils mathématiques (manipuler les équations, dériver, intégrer, trigo., équ. différentielles...)					
Valider	Avoir un regard critique sur les résultats obtenus (formules homogènes, valeurs numériques réalistes...)					
Communiquer	Clarté des raisonnements (on comprend facilement le raisonnement suivi)					

Remarques générales :

Note :