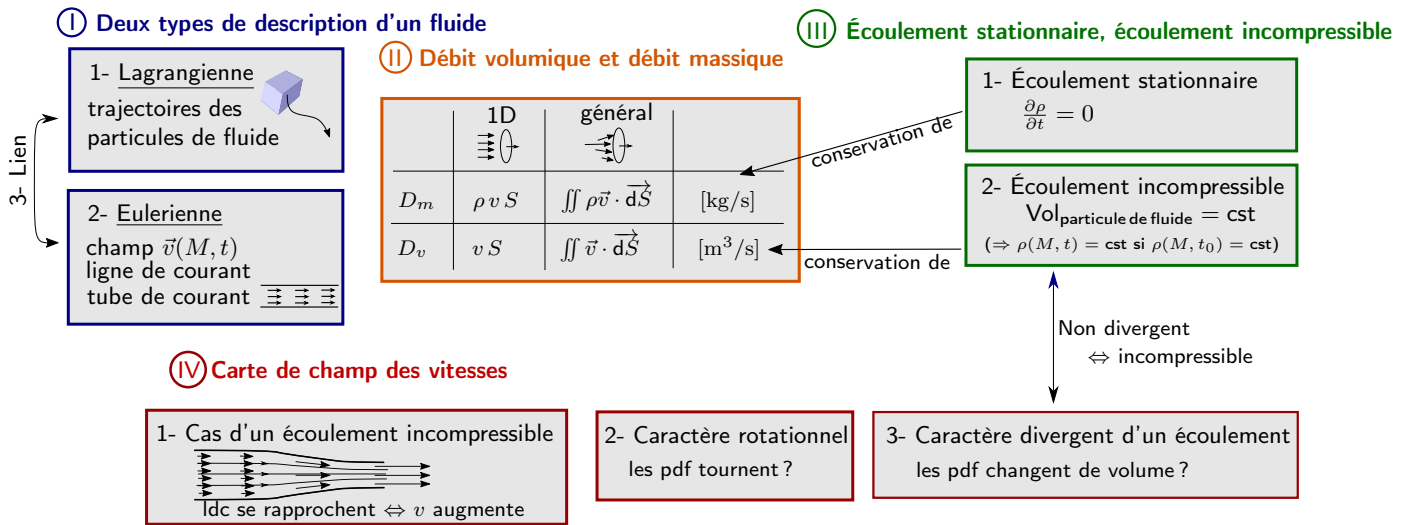


Description d'un fluide en écoulement stationnaire

Plan schématique du cours



Plan du cours

I - Deux types de description d'un fluide : lagrangienne et eulérienne

- 1 - Description lagrangienne ; trajectoires
- 2 - Description eulérienne ; champ de vitesse, carte, ligne de courant, tube de courant
- 3 - Lien entre les deux descriptions : les trajectoires sont-elles les lignes de courant ?

II - Débit volumique et débit massique

- 1 - Cas d'un écoulement 1D dans une conduite
- 2 - Cas général

III - Différents types d'écoulements : stationnaire, incompressible

- 1 - Écoulement stationnaire
- 2 - Écoulement incompressible

IV - Cartes de champ des vitesses

- 1 - Cas d'un écoulement incompressible, caractère divergent
- 2 - Caractère rotationnel d'un écoulement
- 3 - Exemples de cartes de champ de vitesse

Ce qu'il faut connaître

- ₁ Qu'appelle-t-on une description lagrangienne d'un écoulement ? Et une description eulérienne ?
- ₂ Comment définir une ligne de courant, un tube de courant, le débit volumique, le débit massique, un écoulement stationnaire, un écoulement incompressible, un écoulement rotationnel, un écoulement divergent ?

- ▶₃ ★ Quelle est l'expression du débit volumique dans le cas où la vitesse est uniforme et perpendiculaire à la surface S considérée ?
Même question pour le débit massique, en supposant en plus une masse volumique μ_0 uniforme.
- ▶₄ ★ Mêmes questions que ci-dessus, mais dans le cas général d'une vitesse $\vec{v}(M, t)$ non uniforme et non perpendiculaire à la surface S (expressions avec une intégrale).
- ▶₅ ★ Quel est la relation entre le débit volumique D_v et le débit massique D_m ?
- ▶₆ Donner des exemples d'écoulements incompressibles¹.
- ▶₇ ★ Quels sont les liens entre les propriétés à gauche et celles à droite :

Fluide incompressible Écoulement stationnaire Les particules de fluide tournent sur elles-mêmes	Conservation du débit volumique Écoulement non divergent ($\text{div}\vec{v} = 0$) Conservation du débit massique Écoulement rotationnel
---	---

Ce qu'il faut savoir faire

Remarque : La liste ci-dessous comporte les savoir faire généraux, ainsi que des exemples concrets de questions qui peuvent être posées. Ces exemples ne sont pas exhaustifs : d'autres questions peuvent aussi être abordées.

- ▶₈ Exprimer et calculer un débit massique ou volumique (voir TD II pour le cas 1D, et TD V pour le cas avec intégration).
 - On considère un écoulement de vapeur d'eau à 100°C dans une conduite cylindrique de rayon $a = 1.0$ cm. On suppose que la vitesse $v_0 = 1.2$ m/s est uniforme sur une section. On donne $\mu = 0.63$ kg/m³. Donner l'expression puis la valeur du débit volumique. Même question pour le débit massique.²
- ▶₉ Utiliser la conservation du débit massique et/ou volumique le long d'une ou plusieurs conduites ou d'un tube de courant (voir TD III et IV).
 - Une conduite de diamètre d se sépare en deux conduites de diamètres $d/2$. On suppose le fluide incompressible. Par combien est multipliée la vitesse entre l'entrée et la sortie de ce système ?³
- ▶₁₀ Étant donnée une carte du champ de vitesse, en déduire si l'écoulement est a priori divergent ou rotationnel (voir TD VI).
 - Le faire sur les exemples de la partie IV.3.

1. En général les liquides, et les gaz dans le cas de vitesses petites devant la vitesse du son.

2. On a $D_v = (\pi a^2)v_0 = 3.8 \times 10^{-4}$ m³ · s⁻¹, et $D_m = \mu(\pi a^2)v_0 = 2.4 \times 10^{-4}$ kg · s⁻¹.

3. Le débit volumique se conserve car l'écoulement est incompressible. Or le débit volumique en entrée est $D_{v,e} = \frac{\pi d^2}{4} v_e$, et en sortie $D_{v,s} = 2 \times \frac{\pi (d/2)^2}{4} v_s = \frac{\pi d^2}{8} v_s$. Comme $D_{v,s} = D_{v,e}$ on doit avoir $v_s = 2v_e$.

I Deux types de description d'un fluide : lagrangienne et eulerienne

I.1 Description lagrangienne

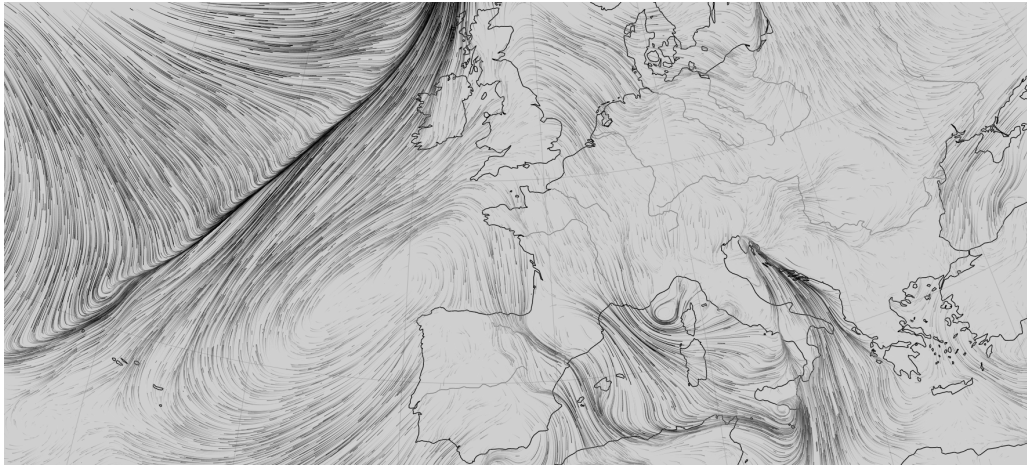
Rappel : Une particule de fluide est un volume mésoscopique fermé qu'on suit dans son mouvement à mesure que le fluide s'écoule.

La **description lagrangienne** d'un écoulement consiste à visualiser ou étudier les trajectoires des particules de fluide.

La **trajectoire** d'une particule de fluide est ainsi l'ensemble de ses positions dans le temps.

Exemple 1 : Une photographie en pause longue où apparaissent les traînées des phares de voitures s'apparente à une description lagrangienne de l'écoulement des voitures, puisqu'on trace la trajectoire de chacune d'entre-elles.

Exemple 2 : Carte des vents au dessus de l'Europe.



Sur l'animation en ligne (<https://earth.nullschool.net/>) les points noirs bougent et représentent les trajectoires de particules de fluide. C'est donc un point de vue lagrangien.

I.2 Description eulérienne

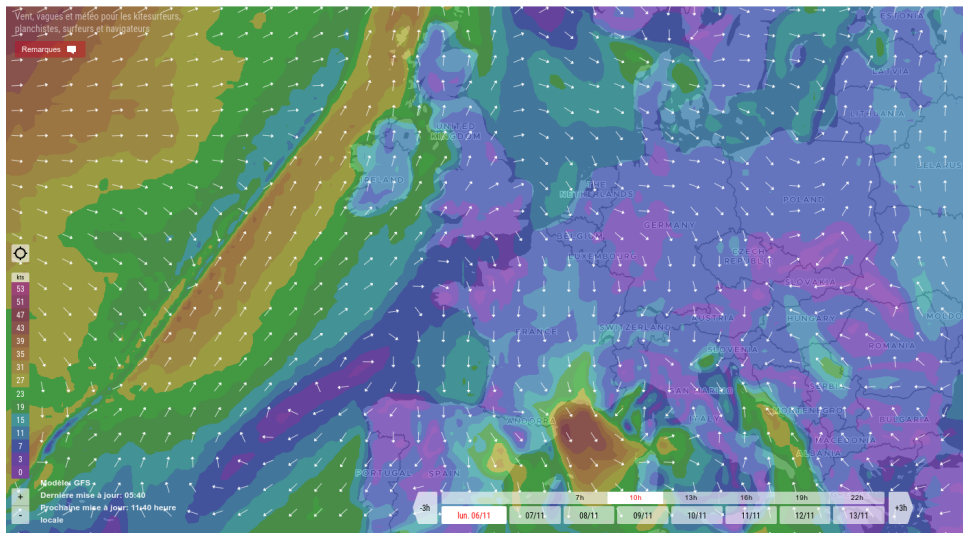
La **description eulérienne** d'un écoulement consiste à :

- Découper l'espace en un quadrillage de volumes mésoscopiques fixes.
- Dans chacun de ces petits volumes fixes, mesurer les grandeurs souhaitées. Si M désigne un point au centre d'un des volumes, on peut mesurer l'évolution de $\rho(M, t)$, $p(M, t)$, $T(M, t)$, $\vec{v}(M, t)$, en fonction du temps.

Dit autrement, ceci revient à quadriller l'espace et à mesurer les grandeurs dans chaque case.

Remarque : Les grandeurs considérées sont mesurées localement : dans un petit volume en un point M . Il s'agit donc nécessairement de grandeurs intensives.

Exemple 1 : Carte des vents au dessus de l'Europe.



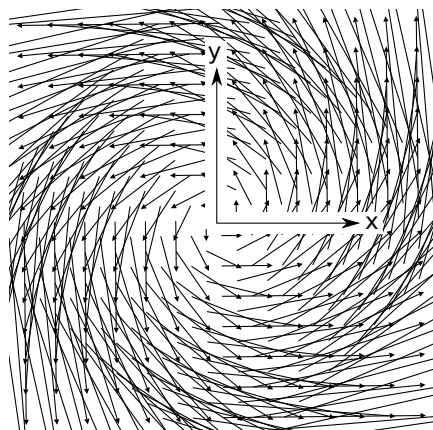
On trace, à un instant t fixé, la vitesse et la direction du vent.

On a donc :

- La direction du vent représentée par des vecteurs de même longueur, c'est un champ vectoriel.
- Dans ce cas particulier, l'intensité du vent n'est pas représentée par la longueur des vecteurs, mais par le code couleur. Ce code couleur représente un champ scalaire.

(Source : <https://fr.windfinder.com/>.)

Exemple 2 : Carte des vitesses d'une rotation.



Carte de champ de vitesses, d'équation

$$v_x = -v_0 y/a, \quad v_y = v_0 x/a.$$

En coordonnées polaires ceci correspond à

$$\vec{v}(r, \theta) = \frac{v_0}{a} r \vec{e}_\theta,$$

c'est-à-dire une rotation solide (tout tourne en bloc).

Dans cette description eulerienne, on distingue deux types de grandeurs tracées :

- On parle de **champ scalaire** lorsque la grandeur tracée est un scalaire (p, T, ρ, \dots),
- et de **champ vectoriel** lorsque la grandeur tracée est un vecteur (\vec{v}, \dots).

Un peu de vocabulaire et de définitions :

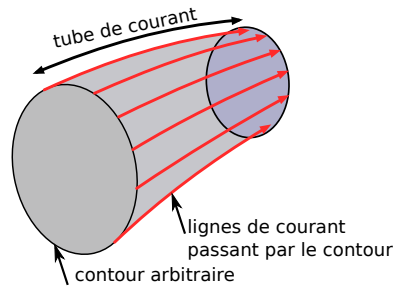
- a. **Le champ de vitesse ou carte de champ des vitesses :** c'est la donnée, à t_0 fixé, de la vitesse en tout point : $\vec{v}(M, t_0)$.
C'est un champ vectoriel.

Exemples : les cartes de vitesses ci-dessus.

- b. **Une ligne de courant :** c'est une ligne tangente en tout point au vecteur $\vec{v}(M, t)$ (à t fixé).

Exemple : en tracer quelques unes sur les champs de vitesses ci-dessus.

- c. **Un tube de courant** : c'est une surface construite en prenant un contour fermé, et en traçant toutes les lignes de champ qui s'appuient dessus (le tout en restant à t fixé).



- d. **Un écoulement stationnaire** : c'est un écoulement pour lequel les grandeurs physiques en un point M fixe ne dépendent pas du temps t .

Autrement dit, pour tout point M fixe :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \text{etc...}$$

Exemple : Un écoulement dans une conduite en régime permanent.

Contre exemple : L'écoulement du vent dans l'atmosphère.

I.3 Lien entre les deux descriptions

Est-ce que les trajectoires des particules de fluide suivent les lignes de courant ?

- Oui si l'écoulement est stationnaire.
- Non en général.

II Débit volumique et débit massique

→ sur votre cahier

III Différents types d'écoulements : stationnaire, incompressible

→ sur votre cahier

IV Cartes de champ de vitesses

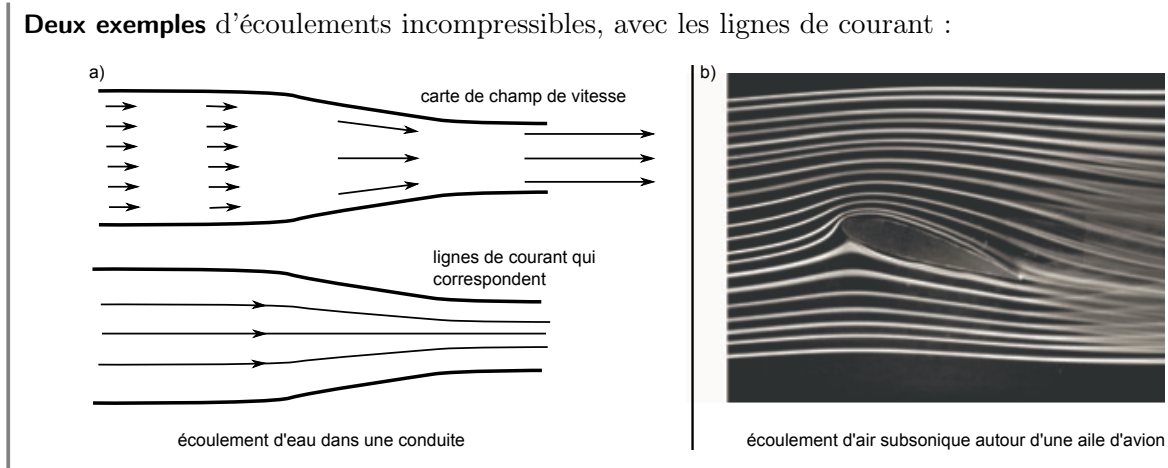
IV.1 Cas d'un écoulement incompressible, caractère divergent

a – Écoulement incompressible : conséquences sur les lignes de courant

Dans le cas d'un écoulement incompressible, on a :

les lignes de courant se rapprochent \Leftrightarrow la vitesse du fluide augmente.

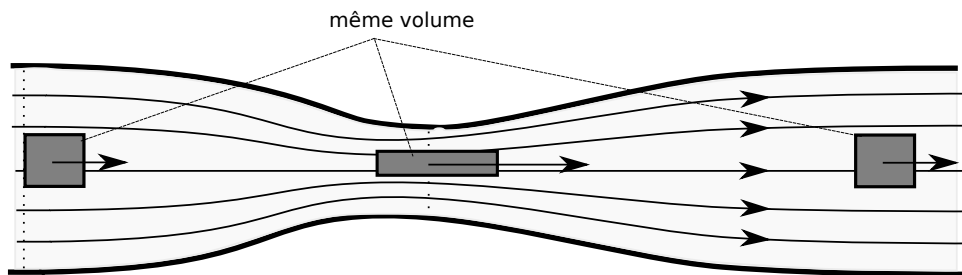
Deux exemples d'écoulements incompressibles, avec les lignes de courant :



Remarque : Que font les particules de fluide ?

On a dit que pour un écoulement incompressible, leur volume ne change pas.

Exemple :



Écoulement incompressible : la particule de fluide est déformée, mais son volume ne change pas.

b – Caractère divergent d'un écoulement

Lorsque l'écoulement est compressible, alors le débit volumique ne se conserve pas le long de tout tube de courant.

→ on parle alors d'écoulement divergent.

On a :

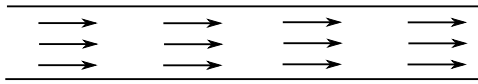
écoulement divergent \Leftrightarrow écoulement compressible $\Leftrightarrow D_v$ ne se conserve pas
et donc aussi :

écoulement non divergent \Leftrightarrow écoulement incompressible $\Leftrightarrow D_v$ se conserve

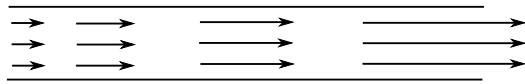
Remarque : De façon plus mathématique, un écoulement non divergent (donc incompressible) est tel que $\text{div } \vec{v} = 0$, où div est l'opérateur divergence que nous définirons en électromagnétisme.

Exemples :

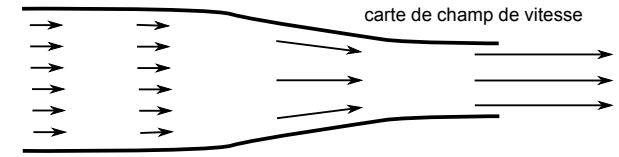
a) carte de champ des vitesses d'un écoulement uniforme



c) écoulement non uniforme



b)

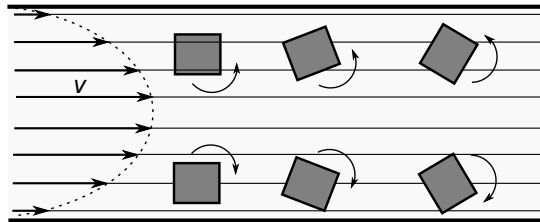


lignes de courant qui correspondent

IV.2 Caractère rotationnel d'un écoulement

Un écoulement est rotationnel si les particules de fluide tournent sur elles-mêmes.

Exemple : d'écoulement rotationnel :



Dans cet exemple, la vitesse près du bord est plus faible que celle proche du centre, ce qui entraîne la rotation des particules de fluide.

(En réalité les particules de fluide tournent mais sont aussi déformées, voir exemple 2 plus bas.)

Remarques :

- Dans le cas contraire, l'écoulement est dit "irrotationnel".
- En général, l'écoulement est rotationnel si les lignes de courant se referment sur elles-mêmes (mais il y a des exceptions, cf l'exemple 4 ci-dessous).
- De façon plus mathématique, un écoulement irrotationnel est tel que $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$, où rot est l'opérateur rotationnel que nous définirons en électromagnétisme.

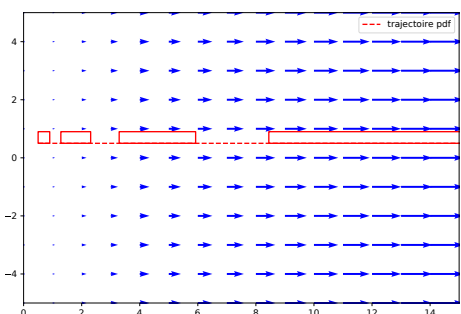
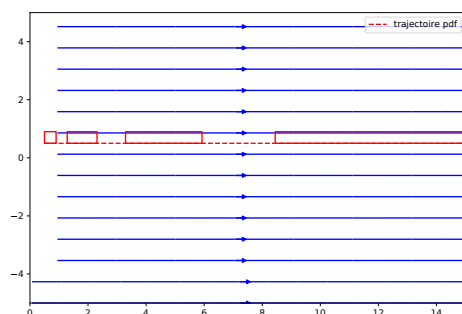
IV.3 Exemples de cartes de champ de vitesse

Pour les exemples suivants, on trace à gauche les lignes de courants, et à droite la carte du champ de vitesses. Le quadrilatère rouge représente une particule de fluide. Elle est initialement carrée, puis on la suit dans son mouvement à mesure qu'elle est entraînée par l'écoulement.

Exemple 1 : écoulement horizontal accéléré

$$\begin{cases} v_x = \alpha x \\ v_y = 0 \end{cases}$$

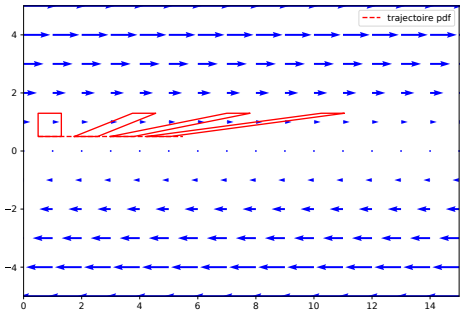
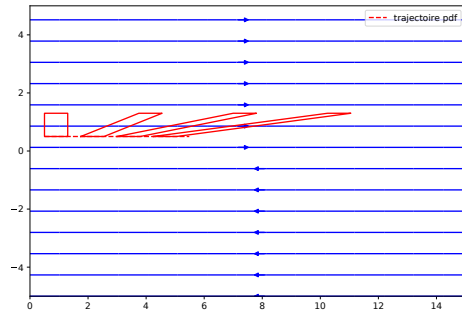
On a $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$
et $\text{div } \vec{v} = \alpha$.



Exemple 2 : écoulement de cisaillement

$$\begin{cases} v_x = \alpha y \\ v_y = 0 \end{cases}$$

On a $\vec{\text{rot}} \vec{v} = -\alpha \vec{e}_z$
 et $\text{div} \vec{v} = 0$.

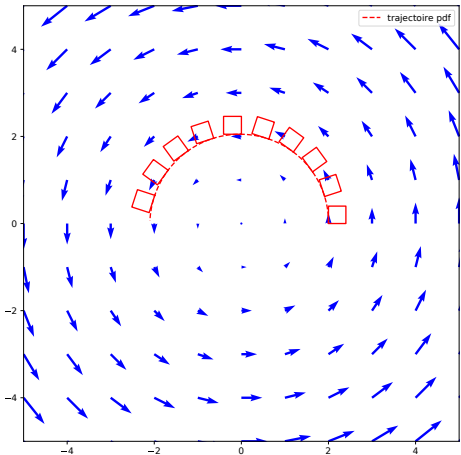
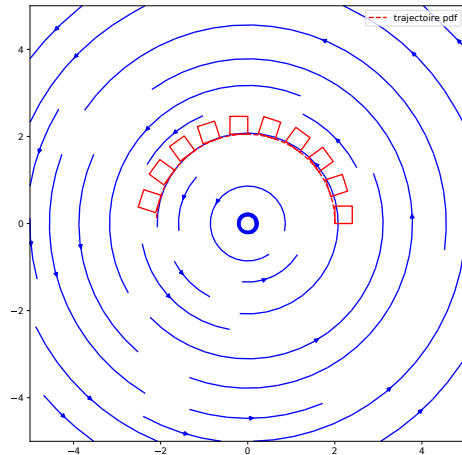


Exemple 3 : rotation solide

$$\begin{cases} v_x = -\Omega y \\ v_y = \Omega x \end{cases}$$

soit encore $\vec{v} = r\Omega \vec{e}_\theta$
 en coordonnées polaires.

On a $\vec{\text{rot}} \vec{v} = 2\Omega \vec{e}_z$
 et $\text{div} \vec{v} = 0$.

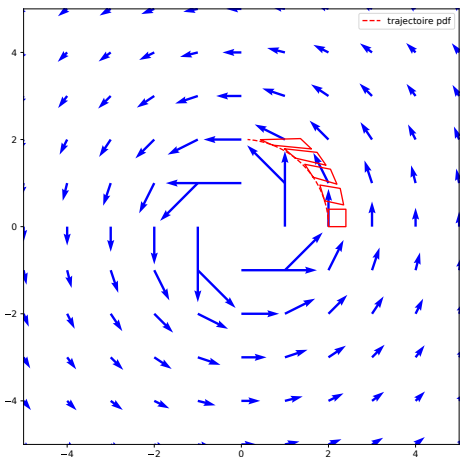
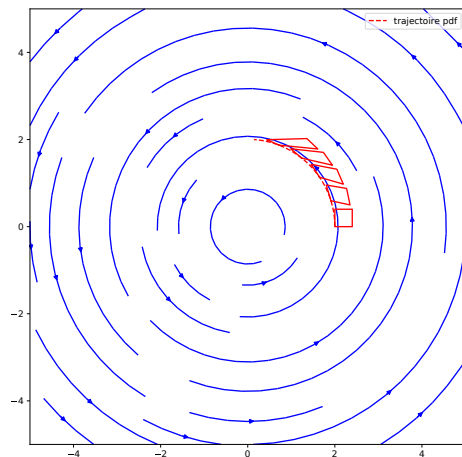


Exemple 4 : rotation tourbillonnaire

$$\begin{cases} v_x = -\alpha \frac{y}{x^2 + y^2} \\ v_y = \alpha \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

soit encore $\vec{v} = \frac{\alpha}{r} \vec{e}_\theta$
 en coordonnées polaires.

On a $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$
 et $\text{div} \vec{v} = 0$.



Remarque : C'est un exemple où les lignes de courants sont fermées, ce sont même des cercles concentriques, et pourtant $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$. On voit sur le graphique que la particule de fluide ne tourne pas sur elle-même : elle est en translation circulaire.

Exemple 5 : un peu de tout

$$\begin{cases} v_x = \alpha(3x + y) \\ v_y = 2\alpha y \end{cases}$$

On a $\vec{\text{rot}} \vec{v} = -\alpha \vec{e}_z$
 et $\text{div} \vec{v} = 5\alpha$.

