Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 2

Correction – DM 6 – Utilisation des transformations infinitésimales

Modèle avec des thermostats

1. **a -** La pompe à chaleur permet de chauffer la source chaude, donc il y a un transfert thermique qui va du fluide caloporteur vers la source chaude. On a donc $Q_c < 0$ (car Q_c est la chaleur algébriquement reçue par le fluide).

La pompe à chaleur prélève de la chaleur à la source froide, donc elle reçoit bien un transfert thermique de la part de la source froide : $Q_f > 0$.

Enfin, la pompe à chaleur a besoin de recevoir du travail pour fonctionner, donc $W > 0$.

b - La grandeur utile est $-Q_c$, c'est-à-dire la chaleur reçue par la source chaude.

La grandeur coûteuse est le travail W à fournir au fluide caloporteur.

On a donc $\boxed{\epsilon = \dfrac{-Q_c}{W}}$.

2. **a -** Par définition, la température d'un thermostat reste constante. On a donc T_c et T_f constantes tout au long de l'évolution.

b - L'entropie échangée lors d'un transfert thermique avec un thermostat à la température T_0 est $\boxed{S_e = \dfrac{Q_{\text{reçue}}}{T_0}}$.

c - Le système considéré est le fluide caloporteur. C'est un système fermé. La transformation considérée consiste en un cycle effectué par ce fluide, au cours duquel il reçoit de la part de la source chaude un transfert thermique Q_c, de la source froide un transfert thermique Q_f, ainsi qu'un travail W (qui lui est fourni par un compresseur par exemple).

- L'application du premier principe lors d'un cycle donne $\Delta U = W + Q_c + Q_f$. Or $\Delta U = 0$ car U est une fonction d'état, donc sa variation est nulle au cours d'un cycle (au début et à la fin du cycle le fluide est dans le même état). On a donc $W + Q_c + Q_f = 0$.
- L'application du second principe donne $\Delta S = S_\text{e} + S_\text{c} = \dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f} + S_\text{c}$. On a utilisé le fait que T_c et T_f sont constants pour exprimer les entropies échangées.
  Or $\Delta S = 0$ car S est une fonction d'état, donc sa variation est nulle au cours d'un cycle, et $S_\text{c} = 0$ car on indique que le cycle est réversible.
  On a donc $\dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f} = 0$.
- Enfin, il faut exprimer $\epsilon = \dfrac{-Q_c}{W} = \dfrac{-Q_c}{-Q_c - Q_f} = \dfrac{1}{1 + Q_c/Q_f}$. Or $Q_c/Q_f = -T_c/T_f$ d'après le second principe. Donc on obtient : $\boxed{\epsilon = \dfrac{1}{1 - T_f/T_c}}$.

L'application numérique donne $\boxed{\epsilon = 29.3.}$ (Contrairement à un rendement, une efficacité peut bien être supérieure à 1.)

Modèle avec des pseudo-sources

3. Système : fluide caloporteur. Transformation : cycle infinitésimal. Lors d'un cycle, même infinitésimal, les fonctions d'état ont une variation nulle. On a donc entre le début et la fin du cycle : $\mathrm{d}U = 0$ et $\mathrm{d}S = 0$.

D'après le premier principe : $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q_f + \delta Q_c$, donc ici $\boxed{\delta W + \delta Q_f + \delta Q_c = 0}$.

Concernant le second principe, le cycle est réversible donc $\delta S_\text{c} = 0$. De plus pendant le cycle infinitésimal les températures des sources sont constantes, donc $\delta S_\text{e} = \dfrac{\delta Q_c}{T_c(t)} + \dfrac{\delta Q_f}{T_f(t)}$. On a donc $0 = \mathrm{d}S = \delta S_\text{e}$, donc :

$$\boxed{\frac{\delta Q_c}{T_c(t)} + \frac{\delta Q_f}{T_f(t)} = 0}$$

4. a - ⋆ On applique le premier principe à la source froide. La transformation est encore un cycle infinitésimal.

On a $\mathrm{d}U_{\text{source froide}} = -\delta Q_f + 0$ car le travail est nul (la source froide est de l'eau incompressible indilatable dont le volume ne change pas), et car la chaleur reçue par la source froide est l'opposée de la chaleur reçue par le fluide caloporteur de la part de la source froide, donc $-Q_f$.

⋆ Enfin, on a $\mathrm{d}U_{\text{source froide}} = mc\mathrm{d}T_f$ car la source froide est constituée d'une masse m d'eau de capacité thermique massique c.

⋆ Finalement on obtient $\boxed{\delta Q_f = -mc\mathrm{d}T_f}$.

b - Exactement de la même façon, on montre que $\boxed{\delta Q_c = -mc\mathrm{d}T_c}$.

5. a - On en déduit immédiatement que $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}T_f}{T_f} + \dfrac{\mathrm{d}T_c}{T_c} = 0}$.

b - On a $0 = \dfrac{\mathrm{d}T_f}{T_f} + \dfrac{\mathrm{d}T_c}{T_c} = \mathrm{d}(\ln T_f) + \mathrm{d}(\ln T_c) = \mathrm{d}(\ln T_f + \ln T_c) = \mathrm{d}(\ln(T_f T_c))$. Donc $\ln(T_f T_c)$ est constant, donc $T_f T_c$ est également constant tout au long du fonctionnement de la machine.

6. a - La pompe à chaleur transfert de la chaleur depuis la source froide vers la source chaude ($Q_f > 0$ et $Q_c < 0$). Donc la source froide va se refroidir et la source chaude va se réchauffer : $T_f(t)$ diminue et $T_c(t)$ augmente.

b - On peut écrire $\epsilon(t) = \dfrac{T_c(t)}{T_c(t) - T_f(t)} = \dfrac{T_f(t)T_c(t)}{T_f(t)T_c(t) - T_f(t)^2} = \dfrac{T_{f0}T_{c0}}{T_{f0}T_{c0} - T_f(t)^2}$. Comme $T_f(t)^2$ diminue, alors le dénominateur augmente (signe -), et donc $\epsilon(t)$ diminue.

On s'y attendait, car au cours du temps l'écart de température entre les deux sources augmente, ce qui rend plus difficile le transfert d'énergie de la source froide à la source chaude.

Remarque : On peut déterminer l'expression de $T_f(t)$ et de $T_c(t)$ à condition de se donner une expression pour la puissance fournie au fluide par la machine : il faut se donner $P = \dfrac{\delta W}{\mathrm{d}t}$ en watt.
On utilise alors le premier principe et le second principe. Mais les mathématiques sont un peu laborieuses.

Compétence	A	B	C	D	Remarques
Maîtriser les connaissances et savoir-faire du cours					

	Capacité	A	B	C	D	Remarques
S'approprier	Extraire des informations d'un document ou de l'énoncé					
Réaliser	Écrire ou utiliser les données numériques (applications numériques, chiffres significatifs, unités, conversions si besoin...)					
	Maîtrise des outils mathématiques (manipuler les équations, dériver, intégrer, trigo., équ. différentielles...)					
Valider	Avoir un regard critique sur les résultats obtenus (formules homogènes, valeurs numériques réalistes...)					
Communiquer	Clarté des raisonnements (on comprend facilement le raisonnement suivi)					

Note :