Devoir Surveillé

Correction – DS 2

I Plongée sous-marine

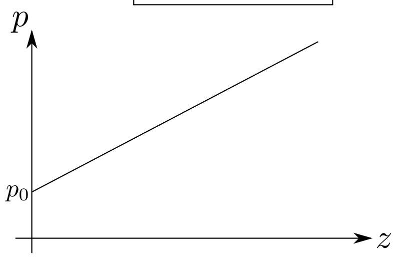
Adapté de TPC 2015.

I.1 La pression du gaz en immersion

1 - a - $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \rho g}$ (signe + car axe z orienté vers le bas : $p(z)$ doit augmenter lorsque z augmente).

b - On a l'équation de la statique des fluides ci-dessus. ρ et g sont constants. On l'intègre donc facilement (c'est du type $f'(x) = \text{cst}$) : $p(z) = \rho g z + A$ avec A une constante d'intégration, que l'on détermine avec la condition aux limites $p(0) = p_0$.

Donc on a $\boxed{p(z) = \rho g z + p_0}$.



Lorsque z augmente de $\Delta z = 10\,\text{m}$, la pression augmente de $\Delta p = \rho g \Delta z \simeq 1\,\text{bar}$.

I.2 L'équipement de plongée

Les stabs

2 - a - Bilan des forces s'exerçant sur le système {plongeur + tout l'équipement} (axe z toujours vers le bas) :

- Poids $\vec{P} = m_i g \vec{e}_z$
- Poussée d'Archimède, en supposant le plongeur et son équipement entièrement immergé : $\vec{\Pi} = \rho V_{\text{total plongeur et équipement}}\, g\, \vec{e}_z = -\rho(V_s(0) + V_p(0) + V_0)\, g\, \vec{e}_z$.

Le plongeur est immobile, donc d'après le principe fondamental de la statique :

$$\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0}.$$

On isole donc $V_s(0)$:

$$\boxed{V_s(0) = \frac{m_i}{\rho} - V_0 - V_p(0) \quad \text{soit} \quad V_s(0) = 12.5 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 = 12.5\,\text{L}}.$$

b - Même raisonnement que précédemment, mais la masse totale devient $m_i + m_{\text{Pb}}$, et le volume total à la profondeur $z_3 = 3\,\text{m}$ est $V_s(z_3) + V_p(z_3) + V_0$.

On a donc $V_s(z_3) = \dfrac{m_i + m_{\text{Pb}}}{\rho} - V_0 - V_p(z_3)$.

Cependant, on ne connaît pas encore $V_p(z_3)$, volume des poumons du plongeur, qui change avec la profondeur à cause des forces de pression. On connaît $V_p(0) = 7.5 \times 10^{-3}\,\text{m}^3$.

On utilise donc la loi des gaz parfaits pour modéliser l'air dans les poumons. On a donc $p(0)V_p(0) = nRT$ et $p(z_3)V_p(z_3) = nRT$, avec le même n car le plongeur ne respire pas, et la même température car supposée constante.

Donc $V_p(z_3) = p(0)V_p(0)/p(z_3)$.

Finalement, le volume du stabs afin que le plongeur se stabilise à 3 m de profondeur est

$$\boxed{V_s(z_3) = \frac{m_i + m_{\text{Pb}}}{\rho} - V_0 - \frac{p(0)}{p(z_3)} V_p(0) \quad \text{soit} \quad V_s(z_3) = 16.2 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 = 16.2\,\text{L}}.$$

Remarque : Si on ne prend pas en compte le fait que $V_p(z)$ varie, on trouve un volume du stabs de 14.5 L, ce qui n'est pas correct.

I.3 Risque de surpression à la remontée

3 - **a -** On modélise le gaz contenu dans les poumons comme un gaz parfait, et on suppose que sa température reste constante. On a donc $pV = nRT = \text{cst}$. Donc $\dfrac{V(0)}{V(z=10\text{m})} = \dfrac{p(z=10\text{m})}{p(0)} = 2$.

b - Il est impératif de ne pas bloquer sa respiration pour éviter un éclatement des poumons.

II La planète Terre, unique planète du système solaire à abriter la vie

Adapté de CCP TSI 2015, sauf le II.3 qui est un ajout.

II.1 La présence d'eau liquide

4 - **a -** 1 : gaz ; 2 : liquide ; 3 : solide ; 4 : fluide supercritique.

b - A est le point triple ; B est le point critique.

5 - **a -** Sous forme solide (glace).

b - Le tableau indique à la surface de Mars une pression de 600 hPa (soit 0.6 bar) et une température de -100^o à 0^o (soit entre 173.15 K et 273.15 K). On voit dans le diagramme p-T que ceci correspond au domaine solide pour l'eau.

II.2 La présence d'une atmosphère : l'influence de la concentration en dioxyde de carbone

6 - **a -** Loi des gaz parfaits : $\boxed{pV = nRT}$, avec p la pression en pascals, V le volume en mètres cube, n la quantité de matière en moles, T la température en kelvins, et R la constante des gaz parfaits en joules par kelvins par moles.

On a $\rho = \dfrac{m}{V}$ et $m = n \times M$, donc $\rho = \dfrac{nM}{V} = \dfrac{pM}{RT}$, soit $\boxed{\rho(z) = \dfrac{p(Z)\,M}{RT_0}}$.

b - On a $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)\,g = -\dfrac{p(z)\,M}{RT_0}\,g = -\dfrac{p(z)}{H}$ avec $\boxed{H = \dfrac{RT_0}{Mg}}$.

Cette dernière équation est de la forme $f' = af$, et s'intègre en $p(z) = A\exp\{-z/H\}$.

On détermine la constante A en sachant que $p(z=0) = p_0$. On a donc $A = p_0$.

Finalement, $\boxed{p(z) = p_0\exp\{-z/H\}}$.

La constante H est une longueur (car le terme z/H dans l'exponentielle est nécessairement sans dimension).

On trouve $\boxed{H = 8.4\,\text{km}}$ pour la Terre.

c - On voit sur le relevé de température que la troposphère n'est pas isotherme. Cette hypothèse de notre modèle n'est donc pas vérifiée en pratique, et on s'attend donc à des écarts entre les prévisions de notre modèle pour la pression et les observations (il faudrait des valeurs mesurées pour pouvoir réellement comparer).

Un autre modèle possible est celui d'une température $T(z)$ affine : $T(z) = T_0 - \lambda z$, avec T_0 et λ choisis pour que $T(z)$ corresponde le plus possible au relevé expérimental.

d - Vénus est plus éloignée que Mercure du Soleil. Elle reçoit donc moins d'énergie thermique par rayonnement. Et pourtant son atmosphère est significativement plus chaude. Ceci s'explique par le fait que Vénus possède une atmosphère dense riche en dioxyde de carbone, alors que Mercure est quasiment dépourvue d'atmosphère. Le dioxyde de carbone permet, via l'effet de serre, de maintenir une température élevée.

II.3 Estimation de la masse de l'atmosphère

7 - **a -** Faire un schéma.

Coordonnées cartésiennes. Axe z vers le haut.

On découpe la colonne d'air en tranches d'épaisseur $\mathrm{d}z$, comprises entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$ et de surface S.

La masse d'une tranche est $\mathrm{d}m = \rho(z) \times S\mathrm{d}z$.

La masse totale de la colonne d'air est :

$$m = \int_{z=0}^{z=+\infty} \mathrm{d}m = \int_{z=0}^{z=+\infty} \rho(z) \times S\mathrm{d}z = \int_{z=0}^{z=+\infty} \rho_0 \times \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \times S\mathrm{d}z, \quad (1)$$

soit encore $\boxed{m = \rho_0 H S.}$

b - La masse totale de l'atmosphère est obtenue en prenant pour S la surface de la Planète, donc $4\pi R_p^2$. Ainsi, $m_{\text{atm}} = \rho_0 H 4\pi R_p^2$.

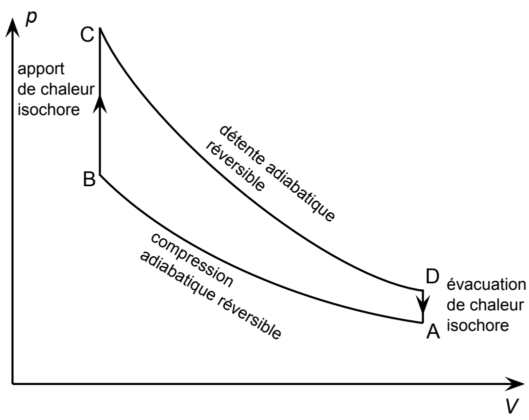
On remplace H par $H = \dfrac{RT_0}{Mg}$. On utilise aussi $\rho_0 = \dfrac{p_0 M}{RT_0}$, pour arriver à $\boxed{m_{\text{tot}} = 4\pi R_p^2 \dfrac{p_0}{g}.}$

Remarque : On pouvait s'attendre à cette expression : p_0 est la force surfacique s'appliquant à la surface de la planète, donc en divisant par g et en multipliant par la surface de la planète on obtient directement la masse de l'atmosphère.

c - Pour Vénus : $\boxed{m_{\text{atm}} = 4.9 \times 10^{20}\,\text{kg}}$, et pour la Terre : $\boxed{m_{\text{atm}} = 5.3 \times 10^{18}\,\text{kg}}$. Il y a bien un rapport d'environ 100.

III Étude du cycle du moteur à explosion

9 -



10 - (a) - Système : n moles de gaz supposé parfait.

Transformation : isochore, entre les états

$$\text{État initial}\ \left|\begin{array}{l} T_B \\ p_B \\ V_B \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \text{État final}\ \left|\begin{array}{l} T_C \\ p_C \\ V_C = V_B \end{array}\right.$$

⋆ Le travail reçu par le système est nul car le volume ne varie pas.

⋆ Le premier principe appliqué au système au cours de la transformation indique donc que $\Delta U_{BC} = Q_{BC}$.

⋆ On utilise le modèle du gaz parfait, donc $\Delta U_{BC} = C_V(T_C - T_B) = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B)$.

⋆ On a donc $\boxed{Q_{BC} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B)}$.

10 - (b) - On a $Q_{BC} > 0$ car $T_C > T_B$. C'est donc bien une chaleur reçue par le mélange air-carburant. Ce qui fournit cette énergie thermique est la combustion du mélange, qui est déclenchée par l'étincelle de la bougie.

11 - (a) - On peut réappliquer les résultats de la questions 1.a : en 1.a on avait une transformation isochore entre les états B et C, ici on a la même transformation mais entre les états D et A, d'où $\boxed{Q_{DA} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_A - T_D)}$.

(b) - On a $Q_{DA} < 0$ car $T_A < T_D$. C'est donc le mélange air-carburant qui cède un transfert thermique vers le milieu extérieur. Dans le cycle réel, l'étape DA correspond au renouvellement du mélange air-carburant dans le cylindre. Il y a donc évacuation du mélange qui est à la température T_D vers le milieu extérieur. Comme T_D est une température élevée, ceci revient à dire qu'il y a un transfert thermique vers le milieu extérieur.

12 - (a) - Système : mélange air-carburant. Transformation : un cycle de fonctionnement.

⋆ U étant une fonction d'état, sa variation pendant un cycle est nulle : $\Delta U = 0$.

⋆ On applique le premier principe au système pendant un cycle : $0 = \Delta U = W + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$.

⋆ Or $Q_{AB} = 0$ et $Q_{CD} = 0$ car AB et CD sont des transformations adiabatiques.

⋆ On en déduit que le travail reçu par le mélange air-carburant lors d'un cycle est $\boxed{W = -Q_{BC} - Q_{DA}}$.

(b) - Pour que le système {mélange air-carburant} fournisse effectivement un travail au milieu extérieur (donc au piston puis au reste de la chaine de transmission), il faut que $\boxed{W < 0}$.

Au cours du cycle, ce travail est produit uniquement au cours des évolutions AB et CD (car les deux autres sont isochores). AB est une compression du mélange air-carburant, pour laquelle il faut fournir un travail (donc $W_{AB} > 0$). CD est une détente, qui a pour effet de fournir du travail au piston et donc au milieu extérieur ($W_{CD} < 0$). C'est donc lors de la détente CD que le travail est fourni au milieu extérieur.

13 - Le rendement (thermique ou non) est défini comme la grandeur utile divisée par la grandeur qui a un coût, ou qu'il faut fournir au système pour qu'il fonctionne.

⋆ Ici la grandeur utile est le travail récupéré au cours d'un cycle, donc $-W$.

⋆ La grandeur coûteuse est la chaleur à fournir lors de l'échauffement BC (qui en pratique est fournie par la détonation du mélange, le coût est donc celui du carburant injecté).

⋆ On a donc $\boxed{\eta = \dfrac{-W}{Q_{BC}}}$.

⋆ En utilisant 4.a, on montre que $\eta = \dfrac{-W}{Q_{BC}} = \dfrac{Q_{BC}+Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \dfrac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$.

⋆ Puis on utilise les relations des questions 2.a et 3.a et on obtient $\boxed{\eta = 1 + \dfrac{T_A - T_D}{T_C - T_B}}$.

14 - (a) - ⋆ On utilise le fait que AB et CD sont des transformation adiabatiques réversibles d'un gaz parfait, pour lesquelles la loi de Laplace s'applique : on a donc $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$ d'une part, et $T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$ d'autre part. Pour faire intervenir le moins possible d'inconnues, on utilise dans cette dernière relation le fait que $V_C = V_B$ et $V_D = V_A$. On a donc

$$\begin{cases} T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \\ T_C V_B^{\gamma-1} = T_D V_A^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} T_B = T_A (V_A/V_B)^{\gamma-1} = T_A \alpha^{\gamma-1} \\ T_C = T_D (V_A/V_B)^{\gamma-1} = T_D \alpha^{\gamma-1} \end{cases}.$$

⋆ On a ensuite $\eta = 1 + \dfrac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = \eta = 1 + \dfrac{T_A - T_D}{T_D \alpha^{\gamma-1} - T_A \alpha^{\gamma-1}} = 1 - \dfrac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$.

Finalement : $\boxed{\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma}}$.

(b) - On a $\alpha = 10$ ici. On trouve donc $\boxed{\eta = 0.60}$.

η augmente avec le rapport de compression.

Remarque : On pourrait donc penser qu'il suffit d'augmenter indéfiniment α pour avoir de bons rendements. C'est en réalité impossible car pour des compressions trop importantes les températures et pressions atteintes dans la chambre sont très élevées et (i) imposent trop de contraintes mécaniques, (ii) font que le mélange air-carburant risque de s'auto-enflammer avant l'étincelle fournie par la bougie et donc avant que le piston soit en haut, ce qui fait que le cycle ne se déroule pas correctement.

(c) - Le rendement théorique est supérieur au rendement réel. Ce rendement théorique correspond au modèle d'un cycle réversible. Il est donc maximal. En réalité, diverses sources d'irréversibilité vont faire diminuer le rendement : frottements du piston dans le cylindre, gradients thermiques importants. De plus, la compression et la détente ne sont pas exactement adiabatiques, et il y a donc un transfert thermique vers l'extérieur lors de ces étapes qui est perdu. L'étape de renouvellement de l'air dans le cylindre, ignorée dans le modèle, nécessite également du travail.

Remarque : Le rendement réel de 25 à 30% correspond au rapport entre le travail récupéré à la sortie du moteur et la chaleur fournie par la combustion. Le rendement global d'un véhicule est encore plus faible, d'abord parce que la combustion du carburant est parfois incomplète, ce qui fait que la chaleur récupérée n'est pas maximale, et ensuite parce que le travail produit par le moteur va servir en partie à combattre les frottements solides entre les pneus et la route et les frottements dus à l'air.

15 - (a) - Système : n moles de gaz supposé parfait.

Transformation : adiabatique réversible, entre les états

$$\text{État initial} \left| \begin{array}{l} T_A = 290\,\mathrm{K} \\ p_A = p_0 = 1.0\,\mathrm{bar} \\ V_A \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \text{État final} \left| \begin{array}{l} T_B \\ p_B \\ V_B = V_A/\alpha \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une transformation adiabatique réversible pour un gaz parfait, on a donc la loi de Laplace : $T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$, d'où $\boxed{T_B = T_A\,\alpha^{\gamma-1}}$. On trouve $T_B = 728\,\mathrm{K}$, soit $\boxed{T_B = 7.3 \times 10^2\,\mathrm{K}}$.

(b) - Système : n moles de gaz supposé parfait.

Transformation : isochore, apport de chaleur $q_m = 23\,\mathrm{kJ/mol}$, entre les états

$$\text{État initial}\ \left|\begin{array}{l} T_B = 728\,\mathrm{K} \\ p_B \\ V_B \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \text{État final}\ \left|\begin{array}{l} T_C \\ p_C \\ V_C = V_B \end{array}\right.$$

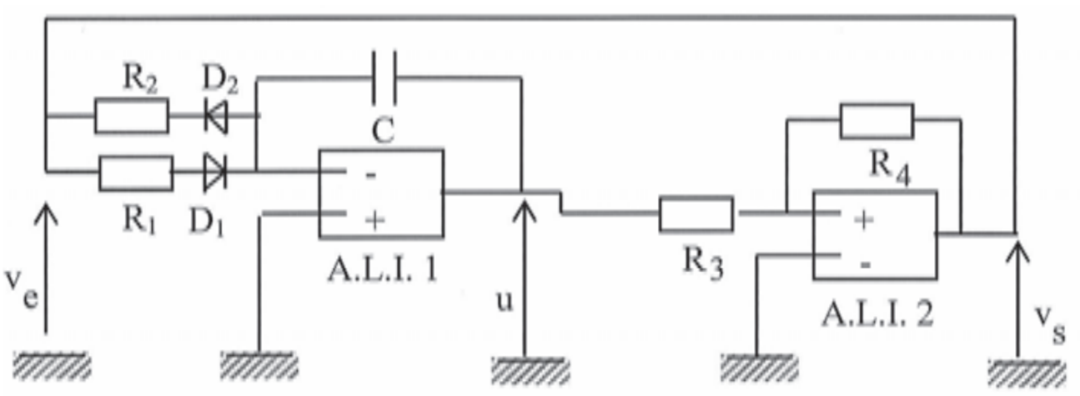
On le transfert thermique Q reçu par les n moles de gaz : $Q = nq_m$. On applique donc le premier principe pour le système et la transformation indiqué ci-dessus, et on utilise l'expression de ΔU pour un gaz parfait : on a $\frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B) = \Delta U = W + Q = Q = nq_m$.

On a donc $\boxed{T_C = T_B + \frac{\gamma-1}{R} q_m}$. On trouve $T_C = 1844\,\mathrm{K}$, soit $\boxed{T_C = 1.8\times 10^3\,\mathrm{K}}$.

(c) - On utilise $\frac{p_C V_C}{T_C} = nR = \frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_A \alpha V_C}{T_A}$, d'où $\boxed{p_C = p_0\,\alpha \frac{T_C}{T_A}}$. On trouve $p_C = 63.6\,\mathrm{bar}$, soit $\boxed{p_C = 64\,\mathrm{bar}}$.

IV Étude d'un générateur de signaux à balayage

Adapté de Banque PT 2017.



16 - Les courants de polarisations sont nuls et le gain est infini.

17 - L'ALI numéro 2 ne possède pas de rétroaction négative. Il fonctionne donc nécessairement en régime saturé.

18 - La tension $u(t)$ est la tension de sortie de l'ALI 1. On constate qu'elle est comprise entre -3 V et +3 V, ce qui est inférieur à V_{sat}. Cet ALI fonctionne donc en régime linéaire.

19 - $v_e = +V_0$ donc on remplace D_1 par un fil et D_2 par un interrupteur ouvert. On ignore donc la résistance R_2.

v_e est la tension d'entrée du bloc avec l'ALI 1, et u la tension de sortie. Il faut donc étudier ce bloc.

ALI idéal en régime linéaire, donc $v_+ = v_-$ et $i_+ = i_- = 0$.

Ici $v_+ = 0$ et $v_- - v_e = (u - v_e)\frac{R_1}{R_1 + 1/(\mathrm{j}C\omega)}$ (diviseur de tension, possible car $i_- = 0$) (bien faire apparaître les tensions sur le schéma pour ne pas se tromper – on peut aussi d'ailleurs utiliser la loi des nœuds exprimée avec les potentiels, mais là aussi mettre les courants et les tensions sur le schéma).

Comme $v_- = v_+ = 0$, on remplace v_- par 0 dans la dernière équation, et on a donc

$$-v_e = (u - v_e)\frac{R_1}{R_1 + 1/(\mathrm{j}C\omega)}. \tag{2}$$

Après quelques manipulations on arrive à $\boxed{u = -\frac{1}{\mathrm{j}R_1 C\omega} v_e}$.

Dans le domaine temporel, ceci se traduit par $\boxed{u(t) = u(0) - \dfrac{1}{R_1 C}\displaystyle\int_0^t v_e(t')\mathrm{d}t'.}$

Comme $v_e = V_0$ est constant, on obtient $\boxed{u(t) = -\dfrac{V_0\, t}{R_1 C}.}$

20 - Pour l'ALI 2, on a $v_+ - u = (v_s - u)\dfrac{R_3}{R_3 + R_4}$ (diviseur de tension, possible car $i_+ = 0$) (bien faire apparaître les tensions sur le schéma pour ne pas se tromper – on peut aussi d'ailleurs utiliser la loi des nœuds exprimée avec les potentiels, mais là aussi mettre les courants et les tensions sur le schéma).

Ceci s'écrit aussi $\boxed{v_+ = \dfrac{R_3\, v_s + R_4\, u}{R_3 + R_4}.}$

On a supposé jusqu'ici que la sortie de l'ALI 2 est $v_s = +V_0$. Ceci est vrai tant que $v_+ > v_-$ pour l'ALI 2.

Or $v_+ > v_- \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{R_3\, v_s + R_4\, u}{R_3 + R_4} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(t) > -\dfrac{R_3}{R_4} V_0 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{V_0\, t}{R_1 C} > -\dfrac{R_3}{R_4} V_0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t < \dfrac{R_3 R_1 C}{R_4} = t_1}$

21 - Comme pour l'ALI 1 on a $v_+ = v_- = 0$, la tension u est en fait la tension aux bornes du condensateur. Elle est donc nécessairement continue.

22 - Pour $t \geq t_1$, la tension v_s a basculé et vaut $-V_0$. La diode D_1 est donc bloquée (c'est un interrupteur ouvert, on ignore donc R_1), et la diode D_2 est passante (c'est un fil).

On a toujours la relation $u(t) = u(t_1) - \dfrac{1}{R_2 C}\int_{t_1}^t v_e(t')\mathrm{d}t'$, mais cette fois on a pris t_1 comme origine des temps et on a remplacé R_1 par R_2.

On a donc, comme $v_e = -V_0$ et comme $u(t_1) = -\dfrac{V_0 t_1}{R_1 C}$:

$$u(t) = -\frac{V_0 t_1}{R_1 C} - \frac{(t - t_1)(-V_0)}{R_2 C} = -\frac{V_0 t_1}{R_1 C} + \frac{V_0 (t - t_1)}{R_2 C}. \tag{3}$$

u s'annule donc pour $\boxed{t_2 = t_1\left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right) = \dfrac{R_3 C}{R_4}(R_1 + R_2).}$

23 - $\boxed{T = 2t_2 = \dfrac{2R_3 C}{R_4}(R_1 + R_2).}$