

44.3 Exercice C3 – conversion mécanique → électrique avec machine en rotation : l'alternateur

On considère une spire rectangulaire de surface S , schématisée ci-contre. Cette spire est fermée sur une résistance R , qui représente un dipôle à alimenter (ceci peut-être une lampe, une batterie à charger, peu importe).

La spire baigne dans un champ magnétique uniforme et stationnaire \vec{B}_0 , produit par un dispositif externe (par exemple des aimants).

On fournit un certain couple Γ_0 pour maintenir en rotation cette spire autour de l'axe Oz à une vitesse angulaire ω constante.

Ceci va avoir pour effet de produire un courant induit i dans la spire, et donc d'alimenter le dipôle R . Il s'agit donc d'un convertisseur de puissance mécanique ($\Gamma_0\omega$ donne la puissance mécanique fournie pour maintenir la rotation) en puissance électrique (Ri^2 fournie au dipôle).

C'est le principe de base des dynamos de vélo ou des alternateurs de voiture qui rechargent la batterie en roulant.

Description de ce qu'il se passe

- 1 - Expliquer qualitativement (= sans équations) pourquoi la rotation de la spire dans le champ \vec{B}_0 induit un courant i .

Détermination du courant produit et de la puissance électrique produite

- 2 - Suivre les étapes de la méthode du chapitre précédent pour établir l'équation électrique :
 - a - Étape 1 : Orienter le circuit en choisissant un sens du courant (c'est déjà fait sur le schéma!).
 - b - Étape 2 : Montrer que le flux de \vec{B}_0 à travers la spire s'écrit $\Phi = B_0 S \cos \omega t$.
 - c - Étape 3 : Faire un schéma électrique équivalent.
 - d - Étape 4 : à l'aide de la loi des mailles, en déduire l'expression du courant i induit.

(Remarque : On a négligé l'inductance propre de la spire, qu'on aurait pu prendre en compte sous la forme d'un terme Li à Φ , soit en ajoutant une inductance L dans le schéma électrique équivalent.)

- 3 - En déduire l'expression de la puissance $\mathcal{P}_{\text{elec}} = ei$ fournie par la fem induite (et donc aussi reçue par le dipôle R).

Bilan : l'expression de i montre qu'on a bien fabriqué un générateur de courant alternatif

44.3 - Correction

Description de ce qu'il se passe

- 1 - La rotation de la spire dans le champ \vec{B}_0 entraîne une variation du flux Φ du champ \vec{B}_0 à travers la spire, et donc une fem induite et un courant induit i .
La production de puissance électrique se fait donc par l'intermédiaire des effets d'induction.

Détermination du courant produit et de la puissance électrique produite

- 2 - a - Étape 1 : Orienter le circuit en choisissant un sens du courant (c'est déjà fait sur le schéma!).

Melzani M.

1 / 14

Raoul Follereau | PTSI

- 3 - Une technique pour résoudre ces deux équations couplées sur v_1 et v_2 est d'abord d'en déduire les équations différentielles vérifiées par les fonctions somme et différence,

$$\Sigma(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad \text{et} \quad \Delta(t) = v_1(t) - v_2(t).$$

Puis en déduire $v_1(t)$ et $v_2(t)$ et tracer leur allure sur un même graphe.

- 4 - Déterminer le courant $i(t)$ qui traverse le circuit.
- 5 - Calculer l'énergie totale dissipée par effet Joule au cours de l'évolution du système entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$.
- 6 - Calculer la variation ΔE_m d'énergie mécanique du système entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$. Commenter.

44.8 - Correction

- 1 - La tige T_1 est mise en mouvement :
 - Cela modifie l'aire comprise entre les tiges et donc le flux de \vec{B} au travers du circuit ;
 - Un phénomène d'induction a lieu, qui se traduit par un courant induit car le circuit est fermé ;
 - Les deux tiges sont parcourues par le courant induit, et ressentent donc une force de Laplace ;
 - D'après la loi de Lenz, ces forces de Laplace s'opposent à la cause de l'induction, c'est-à-dire la diminution de l'aire du circuit : T_1 est donc ralentie, et T_2 se déplace dans le même sens que T_1 pour augmenter l'aire du circuit ;
 - Au moment où les deux tiges ont la même vitesse, l'aire du circuit n'est plus modifiée et il n'y a plus d'induction.

2 - Équation électrique

Calculons le flux magnétique au travers du circuit,

$$\phi = S \vec{B} \cdot \vec{n} = a(x_2 - x_1) B \quad (1)$$

d'où on déduit la f.e.m. induite,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -a(v_2 - v_1)B. \quad (2)$$

Le circuit équivalent ne contient qu'une résistance R et le générateur induit. La loi d'Ohm donne alors

$$e = Ri \quad \text{soit} \quad \boxed{-a(v_2 - v_1)B = Ri}. \quad (3)$$

Équations mécaniques

Les deux équations mécaniques s'obtiennent par application de la loi de la quantité de mouvement aux deux tiges, en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire, que l'on suppose galiléen. Ces tiges sont soumises à leur poids et à une force de réaction qui se compensent ainsi qu'à la force de Laplace qui s'écrit

$$\vec{F}_1 = i(-a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = -iaB\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = i(+a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = iaB\vec{e}_x \quad (4)$$

La loi de la quantité de mouvement projetée sur \vec{e}_x donne alors

$$\boxed{m \frac{dv_1}{dt} = -iaB \quad \text{et} \quad m \frac{dv_2}{dt} = +iaB}. \quad (5)$$

Bilan.

En combinant avec l'équation électrique,

$$\begin{cases} m \frac{dv_1}{dt} = \frac{(aB)^2}{R}(v_2 - v_1) \\ m \frac{dv_2}{dt} = -\frac{(aB)^2}{R}(v_2 - v_1) \end{cases} \quad (6)$$

Melzani M.

3 / 14

Raoul Follereau | PTSI

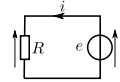
- b - Étape 2 : le flux de \vec{B}_0 à travers la spire s'écrit

$$\Phi = \vec{B}_0 \cdot S\vec{n} = B_0 S \cos \omega t, \quad \text{car l'angle entre } \vec{B}_0 \text{ et } \vec{n} \text{ est } \theta = \omega t.$$

- c - Étape 3 : schéma électrique équivalent ci-contre.

La fem induite est

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega B_0 S \sin \omega t.$$



- d - Étape 4 : loi des mailles :

$$e = Ri, \quad \text{d'où} \quad i = \frac{\omega B_0 S}{R} \sin \omega t.$$

- 3 - La puissance fournie par la fem induite e (et aussi reçue par le dipôle R) s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{elec}} = e \times i = Ri^2 = \frac{\omega^2 B_0^2 S^2}{R} \sin^2 \omega t.$$

Considérations mécaniques : calcul du couple Γ_0 à fournir

- 4 - Puissance mécanique fournie : $\mathcal{P}_{\text{mech}} = \Gamma_0 \omega$.

Or cette puissance fournie se retrouve reçue par le dipôle (car nous négligeons les frottements et les pertes Joules dans les fils), donc

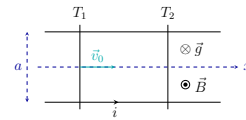
$$\Gamma_0 \omega = Ri^2 = \frac{\omega^2 B_0^2 S^2}{R} \sin^2 \omega t, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Gamma_0 = \frac{\omega B_0^2 S^2}{R} \sin^2 \omega t}.$$

44.8 Rails de Laplace couplés

[•••]

Deux tiges T_1 et T_2 identiques, de masse m , sont mobiles sur deux rails horizontaux parallèles séparés d'une distance a . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. On note R la résistance électrique totale des tiges.

À l'instant initial, T_2 est immobile et T_1 est lancée vers T_2 à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$. Les deux tiges restent parallèles lors de leur mouvement. On note leurs vitesses $\vec{v}_1 = v_1(t)\vec{e}_x$ et $\vec{v}_2 = v_2(t)\vec{e}_x$. On négligea tout frottement, la résistance électrique des rails, et l'auto-induction.



- 1 - Expliquer sans calcul mais avec précision pourquoi la tige T_1 ralentit alors que la tige T_2 se met en mouvement. Dans quel sens se déplace T_2 ?
- 2 - Établir un système de deux équations différentielles couplées portant uniquement sur v_1 et v_2 .

Melzani M.

2 / 14

Raoul Follereau | PTSI

- 3 - En calculant la somme de ces deux équations, on trouve

$$m \frac{d}{dt}(v_1 + v_2) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{d\Sigma}{dt} = 0}. \quad (7)$$

En calculant la différence, on obtient

$$m \frac{d}{dt}(v_1 - v_2) = \frac{2(aB)^2}{R}(v_2 - v_1) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{d\Delta}{dt} + \frac{2(aB)^2}{Rm}\Delta = 0}. \quad (8)$$

- 4 - Les deux équations précédentes se résolvent facilement. La fonction somme Σ est de dérivée nulle, et elle est donc constamment égale à sa valeur initiale,

$$\Sigma(t) = v_0. \quad (9)$$

La fonction différence Δ est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre, dont les solutions sont de la forme

$$\Delta(t) = Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{Rm}{2(aB)^2}. \quad (10)$$

La constante A se détermine à partir de la condition initiale, $\Delta(0) = v_0$, d'où

$$\Delta(t) = v_0 e^{-t/\tau}. \quad (11)$$

On en déduit

$$v_1(t) = \frac{1}{2}[\Sigma(t) + \Delta(t)] = \frac{v_0}{2}(1 + e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{1}{2}[\Sigma(t) - \Delta(t)] = \frac{v_0}{2}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (12)$$

- 5 - D'après l'équation électrique,

$$i(t) = \frac{aB}{R}\Delta(t) \quad \text{d'où} \quad \boxed{i(t) = \frac{aBv_0}{R}e^{-t/\tau}}. \quad (13)$$

- 6 - Multiplions l'équation électrique par i , et les équations mécaniques par les vitesses,

$$a(v_2 - v_1)Bi = -Ri^2 \quad m v_1 \frac{dv_1}{dt} = -iaBv_1 \quad m \frac{dv_2}{dt} = +iaBv_2 \quad (14)$$

puis sommons les trois équations, ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_1^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_2^2 \right) = -Ri^2 \quad (15)$$

soit en reconnaissant les énergies cinétiques,

$$\frac{d}{dt} (E_{c1} + E_{c2}) = -Ri^2. \quad (16)$$

Les variations d'énergie cinétique des tiges sont dues à la dissipation par effet Joule.

- 7 - L'énergie totale dissipée par effet Joule vaut

$$Q_J = \int_0^{+\infty} Ri^2 dt \quad (17)$$

$$= R \int_0^{+\infty} \left(\frac{aBv_0}{R} \right)^2 e^{-2t/\tau} dt \quad (18)$$

$$= \frac{(aBv_0)^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau} dt \quad (19)$$

$$= \frac{(aBv_0)^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^{+\infty} \quad (20)$$

$$= \frac{(aBv_0)^2 \tau}{2} \quad (21)$$

$$= \frac{(aBv_0)^2 Rm}{4(aB)^2} \quad (22)$$

$$\boxed{Q_J = \frac{1}{4} m v_0^2}. \quad (23)$$

Melzani M.

4 / 14

Raoul Follereau | PTSI

8 - Il n'y a aucune énergie potentielle à prendre en compte. L'énergie mécanique initiale est donc

$$E_{m,i} = E_{c1,i} + E_{c2,i} = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0, \quad (24)$$

et l'énergie mécanique finale

$$E_{m,f} = E_{c1,f} + E_{c2,f} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mv_0^2, \quad (25)$$

La variation d'énergie mécanique au cours de l'évolution est donc

$$\Delta E_m = -\frac{1}{4}mv_0^2 \quad (26)$$

On trouve que $\Delta E_m = -Q_J$: toute l'énergie dissipée par effet Joule est prise sur l'énergie mécanique.

44.1 Exercice C1 – Principe de la conversion mécanique → électrique : rails de Laplace tractés

On considère le dispositif des rails de Laplace schématisé ci-contre. La longueur de la tige mobile entre les deux points de contact est notée a , sa masse m , et elle peut glisser sans frottement sur les rails.

Le champ magnétique extérieur $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_y$ est constant et uniforme à travers le circuit.

Il n'y a pas de générateur électrique. En revanche, un opérateur exerce une force \vec{F} sur la tige afin de la faire glisser avec une vitesse constante $\vec{v} = v\vec{e}_x$.

La résistance R représente un dipôle à alimenter (ceci peut-être une lampe, une batterie à charger, peu importe).

On néglige la résistance électrique r des rails ou de la tige, ainsi que l'induction propre L du circuit.

1 - Description de ce qu'il se passe :

- a - Expliquer pourquoi le fait de forcer la tige à se déplacer va donner lieu à un courant induit.
- b - D'après la loi de Lenz, que tend à faire ce courant ?

En déduire le sens dans lequel il s'établit.

Dans la suite nous orientons le circuit dans le sens de ce courant.

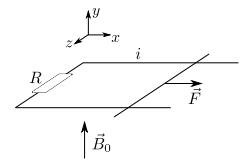
Bilan : il y a production d'un courant i , donc on a bien fabriqué un générateur de courant.

La force de Laplace associée à ce courant induit tend à nous empêcher de déplacer la tige : la puissance mécanique que l'on fournit via la force \vec{F} sert donc à s'opposer à cette résistance.

2 - Détermination du courant produit et de la puissance électrique produite

- a - Suivre la méthode habituelle pour aboutir à l'expression du courant i en fonction de a , B_0 , v et R (il s'agira de l'équation électrique). Attention à l'orientation de la normale du circuit.

Bilan : on a là un dispositif qui produit un courant i continu, et donc qui fournit une certaine puissance au dipôle à alimenter.



44.1 - Correction

1 - Description de ce qu'il se passe :

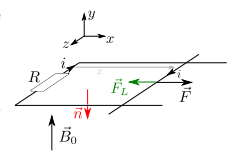
- a - Déplacer la tige entraîne une variation de la surface S du circuit, et donc une variation du flux Φ de \vec{B}_0 à travers le circuit. Il en résulte donc une fem induite e , et comme le circuit est fermé, un courant induit i .

- b - D'après la loi de Lenz, ce courant induit tend à freiner le déplacement de la tige.

La force de Laplace associée au courant induit est donc dirigée selon $-\vec{e}_x$.

On voit donc avec la main droite qu'il faut que le courant soit selon \vec{e}_z pour que $i\vec{L} \wedge \vec{B}_0$ soit selon $-\vec{e}_x$.

Le courant est donc comme indiqué ci-contre.



2 - Détermination du courant produit et de la puissance électrique produite

- a - * Étape 1 : orienter le circuit. C'est fait. Attention, avec ce choix du courant la normale $\vec{n} = -\vec{e}_y$.

* Étape 2 : calculer le flux. On a $\Phi = \vec{B}_0 \cdot S\vec{n} = B_0\vec{e}_y \cdot (ax)(-\vec{e}_y) = -B_0ax$.
(la surface vaut $S = a \times x(t)$)

- 3 - Résoudre ces équations et en déduire l'expression de la tension u_{C1} sous forme d'un produit de cosinus.

- 4 - On suppose que le couplage inductif est faible ($M \ll L$). Déterminer le coefficient β tel que

$$\omega_{1,2} \simeq \omega_0 \left(1 \pm \beta \frac{M}{L}\right).$$

Réécrire l'expression de u_{C1} .

- 5 - Tracer son allure.

43.8 - Correction

1 - Circuit 1.

Le couplage donne lieu à une fem $e = -\frac{dM i_2}{dt}$ en convention générateur.

Concernant L_1 , on la traite comme une bobine (convention récepteur). (On peut aussi la remplacer par une fem de tension $-\frac{dL_1 i_1}{dt}$ en convention générateur, cela revient au même.)

La loi des mailles s'écrit donc :

$$u_{L1} + u_{C1} - M \frac{di_2}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad L \frac{di_1}{dt} + u_{C1} - M \frac{di_2}{dt} = 0.$$

Or on a $i_1 = C \frac{du_{C1}}{dt}$, et dans le circuit 2 on a pour le condensateur : $i_2 = C \frac{du_{C2}}{dt}$. Conclusion :

$$LC \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + MC \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} + u_{C1} = 0$$

Idem dans le circuit 2 en permutant les indices.

$$LC \frac{d^2 u_{C2}}{dt^2} + MC \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + u_{C2} = 0$$

- 2 - Si on somme ces deux équations :

$$(L+M)C \frac{d^2 f}{dt^2} + f = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_1^2 f = 0$$

Si on en prend la différence :

$$(L-M)C \frac{d^2 g}{dt^2} + g = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 g}{dt^2} + \omega_2^2 g = 0$$

- 3 - Forme générale des solutions : ce sont des équations d'oscillateurs harmoniques, donc en faisant apparaître des constantes d'intégration liées aux conditions initiales, on trouve

$$f(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t) \quad \text{et} \quad g(t) = A' \cos(\omega_2 t) + B' \sin(\omega_2 t)$$

Conditions initiales : continuité des tensions aux bornes des condensateurs et des courants dans les bobines, d'où

$$\begin{cases} u_{C1}(0^+) = U_0 \\ u_{C2}(0^+) = 0 \\ \frac{du_{C1}}{dt}(0^+) = \frac{i_1(0^+)}{C} = 0 \\ \frac{du_{C2}}{dt}(0^+) = \frac{i_2(0^+)}{C} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} f(0^+) = U_0 \\ g(0^+) = U_0 \\ \frac{df}{dt}(0^+) = 0 \\ \frac{dg}{dt}(0^+) = 0 \end{cases}$$

Détermination des constantes :

$$A = A' = U_0 \quad \text{et} \quad B = B' = 0$$

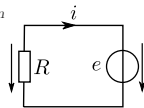
* Étape 3 : Schéma électrique équivalent, où les phénomènes d'induction sont remplacés par une fem e .

La fem induite s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(-B_0 a x(t)) = B_0 a \frac{dx}{dt}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{e = B_0 a v.}$$

* Étape 4 : loi des mailles.

$$Ri = e, \quad \text{d'où l'équation électrique :} \quad \boxed{i = \frac{e}{R} = \frac{B_0 a v}{R}}$$



3 - Considérations mécaniques : calcul de la force F à fournir

- a - Force de Laplace : $\vec{F}_L = i\vec{L} \wedge \vec{B}_0 = ia\vec{e}_z \wedge B_0\vec{e}_y$ (cf schéma pour les orientations), donc

$$\vec{F}_L = -iaB_0\vec{e}_x.$$

Elle est dirigée selon $-\vec{e}_x$, donc s'oppose à la mise en mouvement, ce qui était attendu d'après la loi de Lenz.

- b - Théorème de la résultante cinétique sur la tige :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_L + \vec{F},$$

avec \vec{P} le poids et \vec{R} la réaction des rails qui est selon \vec{e}_y car pas de frottements.

En projection sur \vec{e}_x on obtient, et en se souvenant que l'opérateur qui tire fait en sorte que $\vec{v} = \text{cst}$:

$$0 = \underbrace{F_L}_{=-iaB_0} + F, \quad \text{soit l'équation mécanique :} \quad \boxed{F = iaB_0.}$$

On note que $F = |F_L|$, il faut fournir une force qui compense celle de Laplace.

4 - Considérations énergétiques

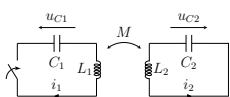
- a - * Puissance reçue par le dipôle R : $\mathcal{P}_{\text{élec reçu dipôle}} = u_R \times i = e \times i = aB_0 v \times i$.

* Puissance mécanique fournie à la tige par la force \vec{F} :

$$\mathcal{P}_{\text{méca fournie}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = iaB_0 \times v.$$

- b - On constate que $\mathcal{P}_{\text{méca fournie}} = \mathcal{P}_{\text{élec reçu dipôle}}$, et on s'y attendait (cf bilan dans l'énoncé).

43.8 Circuits LC couplés par mutuelle [●●○]



Dans le circuit ci-contre, seul le condensateur C_1 est chargé sous la tension U_0 à la date $t = 0$ où l'on ferme l'interrupteur. Pour simplifier les calculs, on considère $C_1 = C_2 = C$ et $L_1 = L_2 = L$, et on pose

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}}$$

- 1 - Établir deux équations différentielles couplées sur les tensions u_{C1} et u_{C2} aux bornes des condensateurs.

- 2 - En déduire deux équations sur les fonctions somme $f(t) = u_{C1} + u_{C2}$ et différence $g(t) = u_{C1} - u_{C2}$.

Conclusion :

$$u_{C1}(t) = \frac{1}{2}(f + g) = \frac{U_0}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$$

et en factorisant les cosinus :

$$u_{C1}(t) = U_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

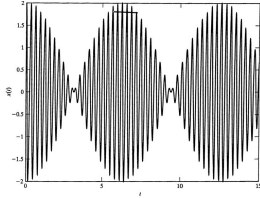
4 - Par un DL :

$$\omega_{1,2} \simeq \omega_0 \left(1 \pm \frac{M}{2L}\right)$$

Ainsi,

$$u_{C1}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t) \cos\left(\frac{M}{2L} \omega_0 t\right)$$

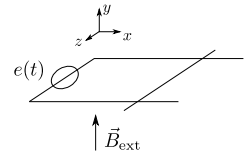
5 - Terme d'oscillations rapides $\cos(\omega_0 t)$ et termes d'oscillations lentes $\cos\left(\frac{M}{2L} \omega_0 t\right)$ qui est une enveloppe. Voir figure ??.



44.2 Exercice C2 – Principe de la conversion électrique → mécanique : rails de Laplace alimentés

On considère le dispositif des rails de Laplace schématisé ci-contre. La longueur de la tige mobile entre les deux points de contact est notée a , sa masse m , et elle peut glisser sans frottement sur les rails.

Le champ magnétique extérieur $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$ est constant et uniforme à travers le circuit. Pour $t < 0$ le générateur ne fournit pas de tension. Puis à partir de $t = 0$ il fournit une tension constante E_0 . On note R la résistance électrique totale du circuit.



1 - L'orientation du générateur n'est pas précisée. On voudrait que le flux de \vec{B}_0 à travers le circuit orienté soit positif. Orienter le générateur pour que ce soit le cas.

2 - Équation mécanique

a - Donner l'expression de la résultante \vec{F}_L des forces de Laplace qui s'exerce sur la tige mobile, en fonction de la base, a , i , B_0 et d'un vecteur de la base. En quel point s'applique-t-elle ?

b - Établir l'équation du mouvement sur la composante $v(t)$ de la vitesse de la tige selon \vec{e}_x . Il s'agit de l'équation mécanique du système.

Bilan : l'équation mécanique fait intervenir la vitesse et le courant, qui n'est pas constant (effets d'induction). Il y a donc deux inconnues (v et i) pour une équation : il en faut une autre.

3 - Équation électrique

Afin de connaître l'évolution du courant, il faut établir l'équation électrique du circuit équivalent. Comme le circuit ne comporte qu'une seule boucle, on néglige son inductance propre (donc $L = 0$, le flux propre est négligeable devant le flux de \vec{B}_0).

a - Suivre les étapes de la méthode (chapitre 2) pour établir l'équation électrique du circuit (équation sur i , qui fera aussi intervenir la position x de la barre ou ses dérivées).

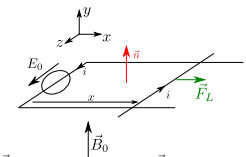
Bilan : l'équation électrique relie elle aussi v et i .

4 - Utiliser les deux équations précédentes (électrique et mécanique) pour aboutir à une équation différentielle sur la vitesse de la barre.

En déduire l'expression de la vitesse limite atteinte, puis du courant débité en régime permanent.

44.2 – Correction

1 - On place le pouce sur B_0 et la rotation de la main (droite) indique que le courant doit être dans le sens indiqué ci-contre. On en déduit alors l'orientation du générateur.



2 - Équation mécanique

a - Résultante des forces de Laplace : $\vec{F}_L = i \vec{L} \wedge \vec{B}_0$ avec l'orientation de \vec{L} donnée par le sens du courant, donc $\vec{L} = -a \vec{e}_x$. D'où :

$$\vec{F}_L = -ia \vec{e}_x \wedge B_0 \vec{e}_y, \text{ soit } \boxed{\vec{F}_L = ia B_0 \vec{e}_x}$$

On vérifie avec la main droite que le sens est correcte : si $i > 0$ on a bien, avec le pouce sur la tige dans le sens de i , l'index sur \vec{B}_0 , une force dans le sens de $+\vec{e}_x$.

Son point d'application est le milieu de la tige.

On remarque que le carré sur B_0 fait que le second terme est toujours de même signe et freine la tige.

* On constate que plus v augmente, plus le terme qui freine va être grand, et il va finir par compenser le terme moteur. Donc au bout d'un temps long (quelques fois $\tau = \frac{mR}{a^2 B_0^2}$), $\frac{dv}{dt} = 0$.

On a alors $\frac{a B_0 E_0}{R} = \frac{a^2 B_0^2}{R} v$, d'où $\boxed{v = \frac{E_0}{a B_0}}$

* Quant au courant, on avait l'équation mécanique :

$$m \frac{dv}{dt} = ia B_0, \text{ donc lorsque } v = \text{cst, on a } \boxed{i = 0}$$

Ce courant i est le courant total (générateur + effet d'induction). Il est nul, c'est donc que le courant induit compense complètement le courant produit par le générateur. C'est un cas extrême de la loi de Lenz. La force de Laplace devient nulle, et la tige continue son mouvement à vitesse constante (car nous négligeons tout frottements).

5 - Bilan énergétique :

On part de $E_0 = Ri + B_0 a v$ que l'on multiplie par i , et on se souvient que $F_L = B_0 a i$:

$$E_0 i = Ri^2 + B_0 a v i, \text{ soit } E_0 i = Ri^2 + F_L v$$

On a donc :

– $\mathcal{P}_{\text{elec fournie gén}} = E_0 i$ la puissance électrique fournie par le générateur, qui est distribuée dans deux termes :

– $\mathcal{P}_{\text{pertes Joule}} = Ri^2$ la puissance dissipée par effet Joule, et

– $\mathcal{P}_{\text{méca forces Laplace}} = F_L v$ la puissance mécanique fournie par les forces de Laplace à la tige.

43.9 Pince ampèremétrique



Une pince ampèremétrique permet la mesure de courants de fortes intensités sans avoir à ouvrir le circuit pour y placer un ampèremètre. Lorsque la pince est fermée autour d'un fil, ses deux mâchoires constituent une bobine, et le phénomène d'induction magnétique permet d'obtenir aux bornes de cette bobine une tension directement liée à l'intensité à mesurer.

On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$.

Le courant dont l'intensité variable i_1 est à mesurer parcourt un fil rectiligne (1), confondu avec l'axe Oz , dont les bornes A_1 et A_2 sont supposées infiniment éloignées l'une de l'autre. On peut montrer que le champ créé en tout point de l'espace M repéré par ses coordonnées cylindriques, voir figure 1, vaut

$$\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

On modélise la pince ampèremétrique par un tore de section carrée de côté $a = 1 \text{ cm}$, d'axe Oz et de rayon moyen $r_0 = 5 \text{ cm}$ sur lequel sont bobinées régulièrement $N = 1000$ spires régulièrement réparties, voir figures 2 et 3. Les deux extrémités du bobinage sont reliées à un oscilloscope. On néglige les phénomènes d'autoinduction.

b - Théorème de la résultante cinétique sur la tige :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_L$$

avec \vec{P} le poids et \vec{R} la réaction des rails qui est selon \vec{e}_y , car pas de frottements. En projection sur \vec{e}_x on obtient :

$$m \frac{dv}{dt} = ia B_0, \text{ soit l'équation mécanique : } \boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{ia B_0}{m}}$$

c - Si $i = \text{cst}$, alors ceci s'intègre en $\boxed{v = \frac{ia B_0}{m} t}$.

En pratique, le courant i n'est pas constant :

- nous avons montré que la tige s'éloigne selon $+\vec{e}_x$,
- donc la surface du circuit est de plus en plus grande, donc le flux Φ de \vec{B}_0 augmente,
- si Φ varie, c'est qu'il y a création d'un courant induit dans le circuit,
- d'après la loi de Lenz le courant induit va s'opposer à ce qui le cause, c'est-à-dire qu'il va freiner la tige,
- et pour cela, ce courant induit doit s'opposer au courant du générateur.

3 - Équation électrique

a - * Étape 1 : orienter le circuit. C'est déjà fait avec le choix du sens du courant.

* Étape 2 : calculer le flux à travers le circuit.

$$\Phi = \underbrace{Li}_{\text{négligé}} + \vec{B}_0 \cdot S \vec{n} \text{ avec } S = a \times x \text{ et } \vec{n} = +\vec{e}_y$$

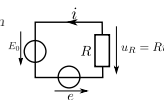
On a donc $\Phi = B_0 a x(t)$.

* Étape 3 : schéma électrique équivalent, où les phénomènes d'induction sont remplacés par une fem

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB_0 a x(t)}{dt} = -B_0 a \frac{dx}{dt} \text{ soit } e = -B_0 a v$$

* Étape 4 : loi des mailles, $E_0 + e = Ri$, d'où :

$$\text{équation électrique : } \boxed{E_0 = B_0 a v + Ri}$$



4 - * On a donc deux équations couplées, portant sur les deux inconnues $i(t)$ et $v(t)$:

$$m \frac{dv}{dt} = ia B_0 \text{ et } E_0 = B_0 a v + Ri$$

On cherche une équation sur v uniquement, donc on isole i dans la seconde : $i = \frac{E_0}{R} - \frac{B_0 a}{R} v$, et on injecte dans la première :

$$m \frac{dv}{dt} = a B_0 \left(\frac{E_0}{R} - \frac{B_0 a}{R} v \right), \text{ soit } \boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{a B_0 E_0}{m R} - \frac{a^2 B_0^2}{m R} v}$$

On peut interpréter cette équation :

$$\frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{a B_0 E_0}{m R}}_{\text{terme moteur dû au générateur}} - \underbrace{\frac{a^2 B_0^2}{m R} v}_{\text{terme résistif dû à l'induction}}$$

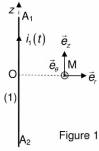


Figure 1

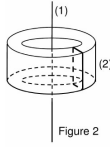


Figure 2

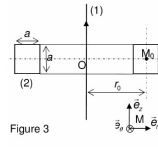


Figure 3

Tension aux bornes de la bobine

- On fait l'approximation que le champ magnétique est uniforme sur la surface d'une spire du tore et égal à sa valeur en M_0 . Calculer le flux Φ_{12} de \vec{B}_1 au travers d'une spire du bobinage (2), puis au travers du bobinage (2) entier.
- Donner alors l'expression de la tension u_2 obtenue aux bornes du bobinage (2).
- Le courant dans le fil (1) est sinusoïdal d'intensité $i_1(t) = I_m \cos \omega t$. Déterminer l'expression de la fonction de transfert complexe de la pince définie par $\underline{H} = \underline{U}_2 / \underline{I}_1$.
- Que devient l'expression à haute fréquence ? à basse fréquence ? Une pince ampèremétrique permet-elle de mesurer des intensités dans toutes les gammes de fréquence ? Commenter.

Mesures

Le courant dans le fil (1) est sinusoïdal d'intensité $i_1(t) = I_m \cos \omega t$. La bobine (2) étant reliée à un oscilloscope, l'oscillogramme obtenu est représenté ci-contre. Les échelles sont de 1 carreau pour 5 ms et 1 carreau pour 500 mV.

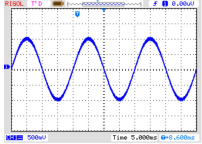


Figure 4

- Établir l'expression de la tension $u_2(t)$ à l'aide des paramètres μ_0 , N , a , r_0 , ω et I_m .
- Quelle est la valeur numérique de la fréquence f de i_1 ?
- Quelle est la valeur numérique de l'amplitude I_m de i_1 ? de sa valeur efficace ?

43.9 - Correction

- 9 - D'après l'hypothèse de l'énoncé, en tout point de la spire,

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_0} \vec{e}_\theta. \quad (27)$$

L'orientation du bobinage (2) n'est pas clairement précisée sur l'énoncé : choisissons-là telle que \vec{e}_θ soit le vecteur normal à une spire, ce qui d'une part est le plus astucieux et d'autre part en accord avec la figure 5. Ainsi,

$$\Phi_{12,1sp} = a^2 \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_0} \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta \quad \text{donc} \quad \Phi_{12} = \frac{N \mu_0 i_1 a^2}{2\pi r_0}. \quad (28)$$

- 10 - D'après la loi de Faraday, il apparaît aux bornes du bobinage (2) une f.é.m. induite

$$u_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad \text{soit} \quad u_2 = -\frac{N \mu_0 a^2}{2\pi r_0} \frac{di_1}{dt}. \quad (29)$$

- 11 - En transposant dans le domaine complexe ($\cos \omega t \mapsto e^{j\omega t}$) la relation précédente, on obtient

$$\underline{U}_2 = -j\omega \frac{N \mu_0 a^2}{2\pi r_0} \underline{I}_1 \quad \text{d'où} \quad \underline{H} = -j\omega \frac{N \mu_0 a^2}{2\pi r_0} \quad (30)$$

- 12 - À haute fréquence, $|\underline{H}| \rightarrow \infty$ et à basse fréquence, $\underline{H} \rightarrow 0$. Il n'est donc pas possible de mesurer l'intensité d'un courant en basse fréquence avec une pince ampèremétrique, et encore moins d'un courant continu. De plus, on peut noter que l'étalement de la pince ampèremétrique doit prendre en compte la fréquence du courant.

- 13 - D'après l'expression obtenue question 10 -, pour $i_1(t) = I_m \cos \omega t$, on trouve

$$u_2(t) = \omega I_m \frac{N \mu_0 a^2}{2\pi r_0} \sin(\omega t) \quad (31)$$

- 14 - Par lecture de l'oscillogramme, une période correspond à quatre carreaux soit 20 ms. On en déduit

$$f = 50 \text{ Hz}. \quad (32)$$

- 15 - Par lecture de l'oscillogramme, $U_{2m} = 1,0 \text{ V}$. On déduit de la relation précédente

$$U_{2m} = 2\pi f I_m \frac{N \mu_0 a^2}{2\pi r_0} \quad \text{donc} \quad I_m = \frac{r_0}{N \mu_0 a^2 f} U_{2m} = 8,0 \text{ kA}, \quad (33)$$

ce qui donne comme valeur efficace

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 5,6 \text{ kA}. \quad (34)$$

- 16 - Par définition, $\Phi_{12} = M i_1$ donc par identification

$$M = \frac{N \mu_0 a^2}{2\pi r_0}. \quad (35)$$

- 17 - Comme le champ \vec{B}_2 n'est non-nul qu'à l'intérieur de la bobine (2), c'est sa surface a^2 qu'il faut prendre en compte pour le calcul du flux car le circuit (1) entoure la bobine. Ainsi, le flux créé par le circuit (2) au travers du circuit (1) vaut

$$\Phi_{21} = a^2 B_2(r_0) \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta \quad \text{soit} \quad \Phi_{21} = a^2 \frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r_0} \quad (36)$$

et par identification avec la définition $\Phi_{21} = M i_2$ on trouve

$$M = \frac{\mu_0 N a^2}{2\pi r_0}. \quad (37)$$

C'est donc exactement la même expression que celle trouvée à partir de Φ_{12} : ce n'est pas une coïncidence mais un résultat général, le théorème de Neumann.

- 18 - D'après la question précédente, même si la forme du circuit (1) change, le flux Φ_{21} n'est pas modifié : le seul point important est que le circuit (1) entoure la bobine (2). En corollaire, l'expression de M est inchangée elle aussi et ne dépend pas du positionnement précis des deux circuits. Par conséquent, la relation entre $\Phi_{12} = M i_1$ n'est pas modifiée, et donc le calcul de la partie précédente reste valable. En résumé, la pince donne une mesure fiable quelle que soit la position du fil à l'intérieur, ce qui est très avantageux pour une utilisation pratique.

- 19 - Une pince ampèremétrique permet de mesurer un courant dans un fil sans avoir à couper ce courant pour ouvrir le circuit et y placer un ampèremètre. On peut donc contrôler les courants électriques dans une installation en fonctionnement. En contre-partie, mesurer le courant dans un câble contenant plusieurs fils n'est pas possible car les contributions de chaque fil s'ajoutent, ce qui engendre en général des compensations non souhaitables qui rendent la mesure inexploitable.