Mécanique
TP

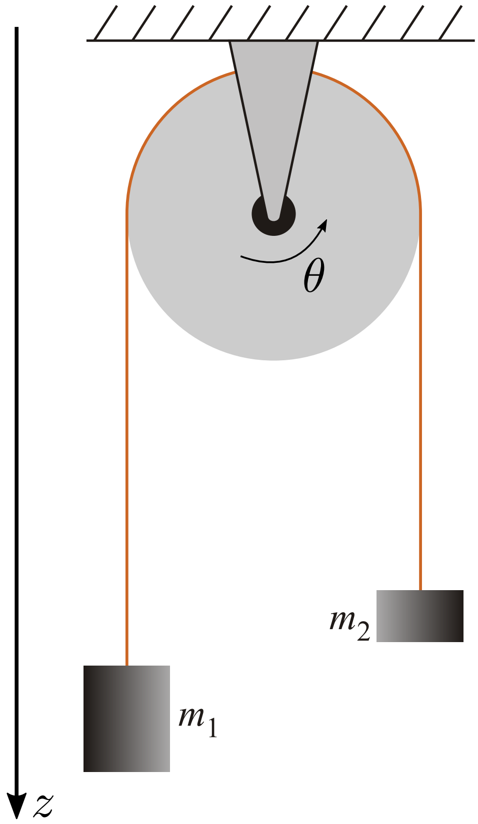
TP : Machine d'Atwood

Matériel. Par groupe : grande potence, poulie, ficelle, boite de masses, chronomètre, mètre ruban. Classe : deux balances ($d = 0{,}1$ g et jusqu'à 500 g).

Objectifs : utiliser un dispositif modélisé par les outils de mécanique du solide, tester cette modélisation via une mesure de la pesanteur.

La machine d'Atwood (1784) consiste en deux masses m_1 et m_2 suspendues de part et d'autre d'une poulie. Si $m_1 = m_2$, l'ensemble reste immobile. Mais si $\delta m = m_1 - m_2 \neq 0$, alors la masse la plus lourde chute et tire vers le haut la masse la plus légère.

Ce dispositif permet une chute ralentie, plus facile à chronométrer. Il a été important historiquement, car il a permis les premiers tests directs et précis de la seconde loi de Newton, cent ans après son énonciation par Isaac.



Modélisation

On peut montrer (cf dernières questions du TP) que le mouvement de chute se fait avec une accélération a constante, donnée par :

$$a = \frac{\delta m}{m_1 + m_2 + J/R^2} \times g, \qquad (1)$$

avec g l'intensité de la pesanteur, J le moment d'inertie de la poulie et R son rayon. Cette formule provient d'un modèle où on néglige tout frottement.

On donne le moment d'inertie autour de son axe d'un objet cylindrique homogène de masse m_p et de rayon R : $J = \frac{1}{2} m_p R^2$.

Mesure de a puis de g

1 - Tester le dispositif avec différentes masses.

2 - Mettre en œuvre un protocole qui permet de mesurer l'accélération a des masses lors d'une expérience. Quelques précisions :

- Prendre $m_1 \approx 220$ g et $m_2 \approx 200$ g, dont on déterminera précisément les valeurs avec la balance.
- Pour diminuer et estimer l'incertitude sur la durée, chaque membre du groupe fera 4 chronométrages.

3 - En déduire une valeur expérimentale de g.

Correction et exemple de valeurs.

Pour une chute à accélération constante, de vitesse initiale nulle, on a $z = \frac{1}{2}at^2$.

Ici il faut donc mesurer la durée T de la chute pour une hauteur L (à mesurer aussi), puis en déduire $\boxed{a = \frac{2L}{T^2}.}$

On a mesuré $L = 134\,\mathrm{cm}$ avec le mètre ruban, à $0{,}5\,\mathrm{cm}$ près.

On chronomètre la chute 4 fois : on obtient 2.67 ,2.52, 2.60, 2.59 secondes. Moyenne $T = 2{,}60\,\mathrm{s}$, écart-type $\sigma = 0{,}05\,\mathrm{s}$.

$$\Rightarrow \quad a = \frac{2L}{T^2} = 0{,}40\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}.$$

Il faut ensuite calculer $g = \frac{m_{\text{tot}}}{\delta m} \times a$.

On pèse $m_{\text{tot}} = m_1 + m_2 + m_p/2 = 430\,\mathrm{g}$ (avec $m_p/2 = 9{,}5\,\mathrm{g}$, et environ $220\,\mathrm{g}$ et $200\,\mathrm{g}$ pour m_1 et m_2), $m_1 - m_2 = 19{,}3\,\mathrm{g}$, d'où :

$$\boxed{g = \frac{430}{19{,}3}a = 22{,}3a = 8{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}.}$$

Il y a 10 % d'écart avec la valeur de référence.

Estimation de l'incertitude

Rappel : lien entre Δ et u

Pour évaluer une incertitude sur une mesure x, sans répéter la mesure, on estime l'intervalle dans lequel on est presque certain de trouver la valeur recherchée. On l'écrit sous la forme $[x - \Delta(x), x + \Delta(x)]$. On appelle $\Delta(x)$ la **demi-étendue d'incertitude**.

L'incertitude-type est alors : $u(x) = \frac{\Delta(x)}{\sqrt{3}}$.

Remarque : l'intervalle $x \pm \Delta(x)$ englobe toutes les valeurs probables, alors que l'intervalle $x \pm u(x)$ n'en englobe que les deux tiers environ.

Pour conclure à l'accord ou non avec la valeur de référence $g_{\text{réf}} = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, il est nécessaire d'estimer l'incertitude sur la valeur de g mesurée. Les sources d'incertitude sont les suivantes (texte à compléter au fur et à mesure) :

- La longueur de chute L.
  Estimer la demi-étendue d'incertitude $\Delta(L) =$ $0{,}5\,\mathrm{cm}$,
  puis l'incertitude-type $u(L) = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}} = 0{,}3\,\mathrm{cm}$.
  En déduire l'incertitude-type relative : $\frac{u(L)}{L} = \frac{0{,}3}{130} = 0{,}3\,\%$.

- La durée de chute T.
  L'incertitude-type est obtenue à partir de l'écart-type σ des N chronométrages : $u(T) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = \dfrac{0{,}06}{\sqrt{4}} = 0{,}03\,\mathrm{s}$.
  En déduire l'incertitude-type relative : $\dfrac{u(T)}{T} = \dfrac{0{,}03}{2{,}6} = 1\,\%$.
- La somme des masses $m_{\text{tot}} = m_1 + m_2 + m_p/2$.
  La demi-étendue d'incertitude pour une pesée sur ces balances est $\Delta(m) = 0{,}2\,\mathrm{g}$, soit donc $u(m) \approx 0{,}1\,\mathrm{g}$.
  On a $u(m_{\text{tot}}) = \sqrt{3}\,u(m) \approx 0{,}2\,\mathrm{g}$ (facteur $\sqrt{3}$ car il y a trois pesées).
  En déduire l'incertitude-type relative : $\dfrac{u(m_{\text{tot}})}{m_{\text{tot}}} = \dfrac{0{,}2}{430} = 0{,}05\,\%$.
- La différence des masses $\delta m = m_1 - m_2$.
  On a $u(\delta m) = \sqrt{2}\,u(m) \approx 0{,}2\,\mathrm{g}$ (facteur $\sqrt{2}$ car il y a deux pesées).
  En déduire l'incertitude-type relative : $\dfrac{u(\delta m)}{\delta m} = \frac{\sqrt{2}\times 0{,}1}{20} = 0{,}7\,\%$.

4 - L'incertitude-type relative sur la mesure de g est alors donnée par :

$$\frac{u(g)}{g} = \sqrt{\left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(2\frac{u(T)}{T}\right)^2 + \left(\frac{u(m_{\text{tot}})}{m_{\text{tot}}}\right)^2 + \left(\frac{u(\delta m)}{\delta m}\right)^2} = \dots.$$

Faire l'application numérique. En déduire $u(g) =$...

5 - La valeur de référence pour g est-elle comprise dans l'intervalle $g \pm 2u(g)$? (ce qui revient à se demander si l'écart normalisé $z = |g_{\text{mesuré}} - g_{\text{référence}}|/u(g)$ est inférieur à 2)

Conclusion ?

Correction :

Avec nos valeurs, $\dfrac{u(g)}{g} \approx 2\,\%$, donc $u(g) \approx 0{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Ainsi, $g \pm 2u(g)$ donne de 8,6 à $9{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

On est bien loin d'un accord avec la valeur de référence de $9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Amélioration du modèle : prise en compte des frottements

La modélisation précédente néglige l'influence des frottements. Nous allons essayer de les prendre en compte dans cette partie, afin d'avoir un meilleur accord.

Pour les faibles vitesses de l'expérience, on peut supposer que c'est un couple résistant statique au niveau de la poulie qui domine.

On part d'une situation avec deux masses identiques, $m_1 = m_2 = 200\,\mathrm{g}$. Puis on ajoute des petites masses d'un côté, jusqu'à ce qu'il y ait mise en mouvement. Le couple résistant peut être estimé par $C_r = -m_r g R$, avec m_r la plus petite masse qu'il faut ajouter pour la mise en mouvement (formule qui vient de la force $m_r \times g$ multipliée par le bras de levier R).

6 - Estimer expérimentalement m_r. On utilisera la balance pour avoir les valeurs précises des masses.

Une mise en équation montre alors qu'il faut retrancher m_r à δm dans la formule pour g :

$$g = \frac{m_{\text{tot}}}{\delta m - m_r} \times a. \tag{2}$$

7 - Calculer votre nouvelle valeur de g.

On peut se convaincre par divers essais que la demi-étendue d'incertitude sur m_r est assez importante, de l'ordre de 1 à 2 g. On prendra $u(m_r) = \dfrac{\Delta(m_r)}{\sqrt{3}} \approx 1\,\text{g}$. C'est elle qui domine (à vérfier tout de même), et on a alors :

$$\frac{u(g)}{g} \approx \frac{u(\delta m - m_r)}{\delta m - m_r} \approx \frac{u(m_r)}{\delta m - m_r}.$$

8 - Faire l'application numérique. En déduire $u(g)$.
La valeur de référence pour g est-elle comprise dans l'intervalle $g \pm 2u(g)$? (ce qui revient à se demander si l'écart normalisé z est inférieur à 2)
Conclusion ?

9 - On fera aussi une mise en commun des résultats de la classe.

Correction :

Avec notre expérience, on estime que $m_r = 2 \pm 1\,\text{g}$. On retient donc $m_r = 2\,\text{g}$. Il vient :

$$\boxed{g = \frac{430}{19{,}3 - 2} a = 9{,}85\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}.}$$

Au niveau des incertitudes :

$$\frac{u(g)}{g} \approx \frac{u(m_r)}{\delta m - m_r} = \frac{1}{17{,}3} = 6\,\%, \quad \text{et} \quad u(g) = 0{,}57\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Ainsi, $g \pm 2u(g)$ donne de 9,3 à 10,4 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, en accord avec la valeur de référence (mais avec une incertitude assez grande, ce n'est pas une mesure précise à cause de l'incertitude importante sur la prise en compte des frottements).

D'autres essais, avec des masses différentes (110 g et 100 g, ou 210 g et 200 g, mènent à la même conclusion.

Démonstration de la formule pour a

L'objectif est de démontrer la formule (1). Plusieurs approches sont possibles. Passons par exemple par le théorème de l'énergie mécanique appliqué au système {masses 1 et 2 + poulie + ficelle}. On prend un axe z vers le bas, et on note z_1 et z_2 les positions des masses 1 et 2, et θ la position angulaire de la poulie.

10 - Écrire la relation cinématique entre $\dot{z}_1$ et $\dot{z}_2$. Faire de même entre $\dot{z}_1$ et $\dot{\theta}$.
En déduire une écriture de l'énergie cinétique du système en fonction de $\dot{z}_1$.

11 - La ficelle étant inextensible, il n'y a aucun travail d'actions mécaniques internes au système. Seule l'énergie potentielle de pesanteur est à prendre en compte. L'écrire en fonction de z_1 et z_2.
Enfin, utiliser le théorème de l'énergie mécanique pour obtenir l'expression de $\ddot{z}_1$, et donc la relation (1).

12 - Reprendre le raisonnement dans le cas où il y a un couple de frottement $C_r = -m_r g R$, et démontrer la relation (2).

Correction :

On a $\dot{z}_2 = -\dot{z}_1$ et $\dot{\theta} = \dot{z}_1/R$. D'où

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + J/R^2)\dot{z}_1^2.$$

Ensuite, $E_p = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2$.
Il vient :

$$0 = \frac{\mathrm{d}(}{\mathrm{d}t}E_c + E_p) = (m_1 + m_2 + J/R^2)\ddot{z}_1\dot{z}_1 - m_1 g\dot{z}_1 - m_2 g(-\dot{z}_1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{z}_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + J/R^2}.}$$

Dans le cas avec frottements : $-m_r g R\,\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}(E_c + E_p)}{\mathrm{d}t}$ ce qui, avec $-m_r g R\,\dot{\theta} = -m_r g\dot{z}_1$, donne $\boxed{\ddot{z}_1 = \dfrac{(m_1 - m_2 - m_r)g}{m_1 + m_2 + J/R^2}.}$