Correction – Physique-chimie – DS 4

I Récupération de l'énergie de vibration

I.1 Étude en régime libre

1 - À l'équilibre la somme des forces qui s'exercent sur la masse est nulle, donc :

$$-mg\,\vec{e}_z - k(z-l_0)\,\vec{e}_z = \vec{0}.$$

On isole z, ce qui donne $\boxed{z_{\text{éq}} = l_0 - \dfrac{mg}{k}.}$

2 - PFD sur le système {masse} : $m\ddot{z}\,\vec{e}_z = -mg\,\vec{e}_z - k(z-l_0)\,\vec{e}_z$, d'où $\boxed{\ddot{z} + \dfrac{k}{m}\,z = \dfrac{kl_0}{m} - g.}$

3 - $\boxed{z(t) = \underbrace{A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t}_{\text{sol. générale}} + \underbrace{l_0 - \frac{mg}{k}}_{\text{sol. particulière}}.}$

4 - Graphique d'un cosinus avec départ en z_1 avec tangente horizontale. Sa moyenne est $z_{\text{éq}}$.

5 - PFD : $m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - k(z-l_0)\vec{e}_z - \alpha\dot{z}\vec{e}_z$, d'où $\boxed{\ddot{z} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{z} + \dfrac{k}{m}\,z = \dfrac{kl_0}{m} - g.}$

6 - $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}},}$ $\boxed{Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\alpha},}$ $\boxed{z_e = l_0 - \dfrac{mg}{k}.}$

7 - Apériodique pour $Q < 0{,}5$, critique si $Q = 0{,}5$, pseudopériodique si $Q > 0{,}5$.
Ici régime apériodique.

8 - $Q < 1/2$ donc $\boxed{z(t) = \underbrace{A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}}_{\text{sol. équ. homogène}} + \underbrace{z_e}_{\text{sol. particulière}},}$

avec $r_{1/2}$ racines de $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, donc $\boxed{r_{1/2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}}$

9 - $\boxed{z = z_e + 1\,\text{mm et } v = 0.}$

I.2 Étude en régime sinusoïdal forcé

10 - Dériver revient à multiplier par jω. L'équation devient donc :

$$\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)\underline{z} = -\mu\,(-\omega^2)\underline{z_d}.$$

D'où $\boxed{\underline{Z_m} = \dfrac{A\mu\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\dfrac{\omega_0}{Q}}.}$

11 - $\boxed{Z_m = |\underline{Z_m}| = \dfrac{A\mu\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}}.}$

12 - $\underline{\text{BF : } Z_m \sim 0}$; $\underline{\text{HF : } Z_m \sim A\mu}$.

13 - $\star$ Z_m maximal si $f(u) = (u^2-1)^2 + u^2/Q^2$ minimal.
$f'(u) = 0$ ssi $2\times 2u(u^2-1) + 2u/Q^2 = 0$ donc en $2(u^2-1) + 1/Q^2 = 0$ donc en $\boxed{u_r = \sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}.}$

$\star$ Pour savoir si c'est un minimum, on redérive : $f''(u) = (4u^3 - 4u + 2u/Q^2)' = 12u^2 - 4 + 2/Q^2 = 12u^2 - 4u_r^2$ et donc $f''(u_r) = 8u_r^2 > 0$.

$\star$ La solution précédente est définie ssi $\boxed{Q > 1/\sqrt{2} = 0{,}7}$. Ce n'est <u>pas le cas ici</u>.

14 - On a environ $\boxed{f \simeq 3\,\mathrm{Hz}}$ et $\boxed{Z_m \simeq 2\,\mathrm{mm}}$ (doc 6 milieu)

15 - À 3 Hz on voit que $Z_m/A = 0{,}033$ (doc. 5), donc $A = Z_m/0{,}033 \simeq 30 \times Z_m$ soit $\boxed{A \simeq 6\,\mathrm{cm}.}$ C'est raisonnable.

16 - Force $F = 60 \times A \times \omega^2 = 60 \times 6\cdot 10^{-2} \times (2\pi\times 3)^2$ soit $\boxed{F \simeq 1300\,\mathrm{N}.}$ Cohérent avec les mesures constructeur (doc 6 en bas).

II Étude d'un bloc filtre

17 - ▶ BF : bobine = fil, donc $u_2 = 0$. ▶ HF : condensateur = fil, donc $u_2 = 0$.

C'est donc un passe-bande.

II.1 Étude des diagrammes de Bode

18 - ▶ BF : $x \to 0$, donc $1/x$ tend vers l'infini et devient très grand devant tous les autres termes du dénominateur. Donc on néglige ces derniers et on a $\boxed{\underline{H} \sim \dfrac{A_0}{-\mathrm{j}Q\frac{1}{x}} = \dfrac{\mathrm{j}A_0 x}{Q}.}$

▶ HF : $x \to +\infty$. Au dénominateur, le terme dominant devient x, et on néglige les autres devant lui. On a donc $\boxed{\underline{H} \sim \dfrac{A_0}{\mathrm{j}Qx}.}$

19 - ▶ BF : $G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{\mathrm{j}A_0 x}{Q}\right| = 20\log\dfrac{A_0 x}{Q}$, soit $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \underset{x\to 0}{\sim} 20\,\log\dfrac{A_0}{Q} + 20\log x.}$

L'asymptote est donc une droite de pente +20 dB/décade et qui prend la valeur $20\,\log\dfrac{A_0}{Q} + \underbrace{20\log(1)}_{0} = -48\,\mathrm{dB}$ en $x = 1$.

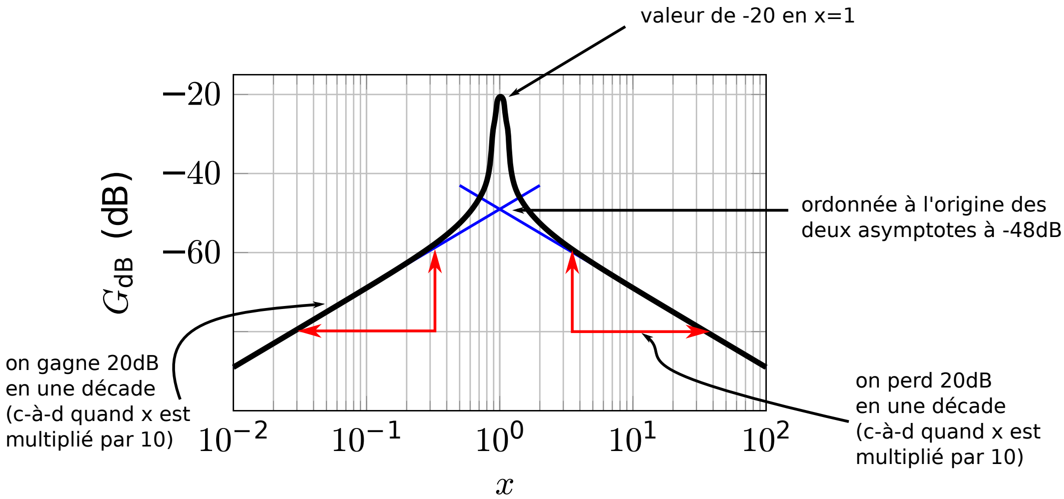
▶ HF : $G_{\mathrm{dB}} \simeq 20\log\left|\dfrac{A_0}{\mathrm{j}Qx}\right| = 20\log\dfrac{A_0}{Qx}$, soit $\boxed{G_{\mathrm{dB}} \underset{x\to +\infty}{\sim} 20\,\log\dfrac{A_0}{Q} - 20\log x.}$

L'asymptote est donc une droite de pente −20 dB/décade et qui prend la valeur $20\,\log\dfrac{A_0}{Q} + \underbrace{20\log(1)}_{0} = -48\,\mathrm{dB}$ en $x = 1$.

20 - En $x = 1$, $\underline{H} = A_0$, donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}}(x=1) = 20\log(A_0) = -20\,\mathrm{dB}.}$

21 - On trace donc les deux asymptotes, qui se croisent en $x = 1$ à la valeur −48 dB.

En $x = 1$ la courbe réelle passe par −20 dB. On a donc l'allure suivante.



22 - ▶ BF : $\boxed{\Delta\varphi \simeq \arg\left(\dfrac{\mathrm{j}A_0 x}{Q}\right) = \dfrac{\pi}{2}.}$ ▶ HF : $\boxed{\Delta\varphi \simeq \arg\left(\dfrac{A_0}{\mathrm{j}Qx}\right) = -\dfrac{\pi}{2}.}$

23 - En $x = 1$, $\underline{H} = A_0$, donc $\boxed{\Delta\varphi = \arg(A_0) = 0.}$

24 - Allure classique : passe de l'asymptote horizontale $+\pi/2$ à l'asymptote horizontale $-\pi/2$, en passant par 0 en $x = 1$.

II.2 Établissement de la fonction de transfert

25 - On a :

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z_{\mathrm{eq}}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \frac{1}{1/(\mathrm{j}C\omega)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega.}$$

26 - Le diviseur de tension donne :

$$\underline{u}_2 = \underline{u}_1 \times \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R_0 + \underline{Z}_{\text{eq}}}$$

$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{1}{\dfrac{R_0}{\underline{Z}_{\text{eq}}} + 1}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{R_0\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega\right) + 1}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{\dfrac{-\mathrm{j}R_0}{L\omega} + \mathrm{j}R_0C\omega + 1 + \dfrac{R_0}{R}}}$$

27 - On veut aboutir à quelque chose de la forme suivante :

$$\underline{H} = \frac{A_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad = \quad \frac{A_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\sqrt{LC}\omega - \dfrac{1}{\sqrt{LC}\omega}\right)}$$

car on sait (d'après l'énoncé) que $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Il faut donc d'abord qu'au dénominateur, le coefficient qui n'est ni devant ω ni devant $1/\omega$ soit égal à 1. On divise donc partout notre expression de la question précédente par $1 + \frac{R_0}{R}$:

$$\underline{H} = \frac{\dfrac{1}{1 + R_0/R}}{\dfrac{1}{1 + R_0/R}\left(\dfrac{-\mathrm{j}R_0}{L\omega} + \mathrm{j}R_0C\omega\right) + 1} = \frac{\dfrac{1}{1 + R_0/R}}{\mathrm{j}\,\dfrac{R_0}{1 + R_0/R}\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right) + 1}.$$

On a donc déjà $\boxed{A_0 = \dfrac{1}{1 + R_0/R}}$.

Ensuite, on impose par exemple l'égalité du facteur devant ω :

on doit avoir $\mathrm{j}Q\sqrt{LC} = \mathrm{j}\dfrac{R_0C}{1 + R_0/R}$, d'où l'on déduit que : $\boxed{Q = \sqrt{\dfrac{C}{L}}\,\dfrac{R_0}{1 + R_0/R}.}$

II.3 Action sur un signal

28 - $G_{\text{dB}} = 20\log(G)$ donc $\boxed{G(f_1) = 10^{G_{\text{dB}}(f_1)/20} = 10^{-2} = 0{,}01.}$

et de même $\boxed{G(f_2) = 10^{G_{\text{dB}}(f_2)/20} = 10^{-1} = 0{,}1.}$

29 - $S_1 = E_1 \times G(f_1) = 0{,}1\,\text{V}$, $S_2 = E_2 \times G(f_2) = 1\,\text{V}$,

$\varphi_1 = \Delta\varphi(f_1) = 1{,}47\,\text{rad}$ et $\varphi_2 = \Delta\varphi(f_2) = 0\,\text{rad}$.