Étude des systèmes linéaires
Chapitre 4

Correction – TD – Régime sinusoïdal forcé

I Impédances équivalentes

1 - Ici L et C_2 sont en parallèles. Ils sont donc équivalents à une impédance $\underline{Z}_2$ donnée par

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{j}C_2\omega}} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C_2\omega.$$

Donc

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C_2\omega}.$$

Enfin, l'impédance équivalente totale est

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_{C_1} + \underline{Z}_2 = \frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega} + \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C_2\omega}.$$

2 - Le R et le C de gauche sont en parallèles, donc équivalents à une impédance $\underline{Z}_2$ donnée par

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega = \frac{1+\mathrm{j}RC\omega}{R}.$$

Donc

$$\underline{Z}_2 = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}.$$

Enfin, l'impédance équivalente totale est

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}.$$

II Suite de l'EC6 : caractéristiques de la résonance en intensité du RLC série

1.
2.
3.

III Résonance en tension du circuit RLC série

1 - $u_c(t) = U_{C0}\cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par $\underline{u}_c = \underline{U}_{C0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ avec $\underline{U}_{C0} = U_{C0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$.

2 - On applique un diviseur de tension :

$$\begin{aligned}\underline{U}_{C0} &= \underline{E}_m \times \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + R} \\ &= \underline{E}_m \times \frac{1/(\mathrm{j}C\omega)}{1/(\mathrm{j}C\omega) + \mathrm{j}L\omega + R} \\ &= \frac{E_0}{1 + (\mathrm{j}L\omega)(\mathrm{j}C\omega) + R\mathrm{j}C\omega} \\ &= \frac{E_0}{1 - LC\omega^2 + R\mathrm{j}C\omega}\end{aligned}$$

On souhaite identifier ceci avec la forme suivante :

$$\underline{U}_{C0} = \frac{E_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}} = \frac{E_0}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

On doit donc avoir $\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} = LC\omega^2$, d'où $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$;

et $\mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0} = R\mathrm{j}C\omega$, d'où après manipulations $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}.}$

3 - On en déduit $\boxed{U_{C0} = |\underline{U}_{C0}| = \dfrac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}.}$

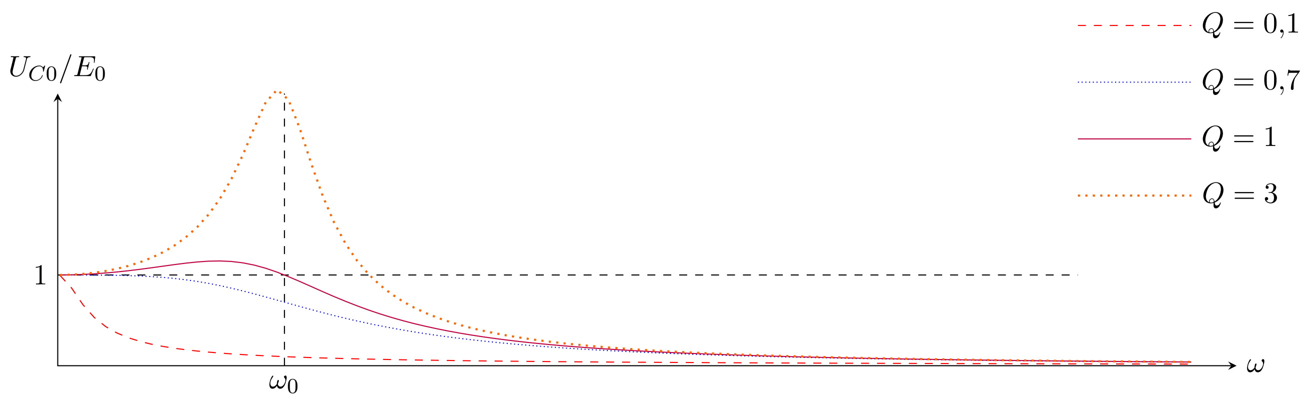
Il y a résonance si $U_{C0}(x)$ admet un maximum pour une valeur de $x \in]0, +\infty[$. Le numérateur ne dépendant pas de x, ceci est équivalent au fait que le dénominateur admette un minimum. On regarde donc si la dérivée de $g(x) = (1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}$ s'annule.

On trouve que c'est toujours le cas en $x = 0$ (c'est alors un maximum ou un minimum, mais ce n'est jamais la résonance car c'est en 0), et qu'il y a une seconde possibilité en $x_r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$, mais qui existe seulement si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

La résonance a donc lieu seulement si $\boxed{Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}},}$ à la pulsation $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}.}$

La tension à la résonance vaut $U_{C\max} = U_{C0}(x_r) = \dfrac{QE_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}.$

On a l'allure suivante :



4 - On a $\varphi = \arg(E_0) - \arg\left((1-x^2) + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}\right) = -\arg\left((1-x^2) + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}\right).$

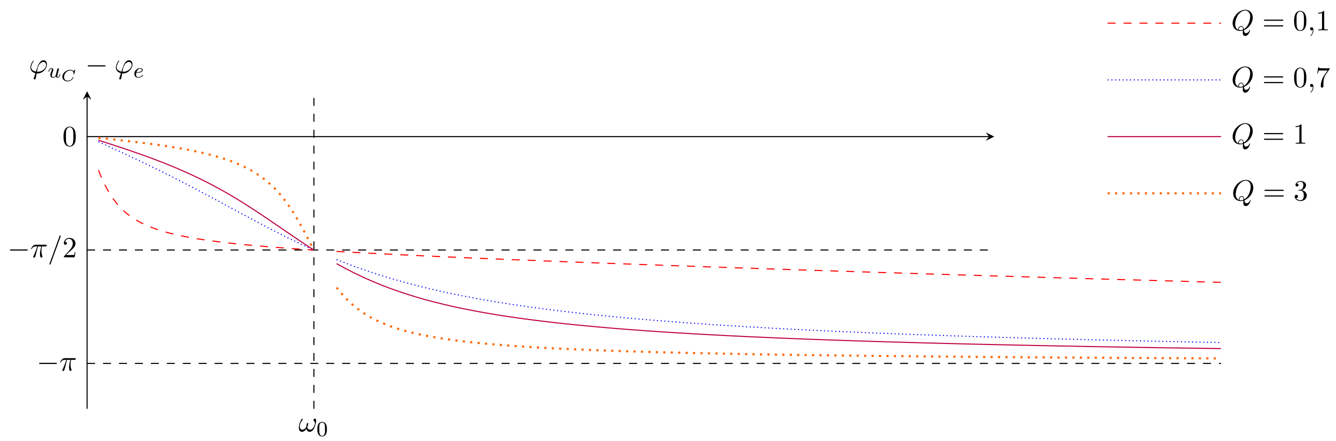
On ne peut pas utiliser l'expression avec l'arctangente car la partie réelle, $1 - x^2$, est parfois négative et parfois positive.

Astuce : on factorise par j :

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\arg\left[(1-x^2)+\mathrm{j}\frac{x}{Q}\right] \\
&= -\arg\left[\mathrm{j}\left(-\mathrm{j}(1-x^2)+\frac{x}{Q}\right)\right] \\
&= -\arg \mathrm{j} - \arg\left(-\mathrm{j}(1-x^2)+\frac{x}{Q}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{-(1-x^2)}{x/Q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{Q(1-x^2)}{x} - \frac{\pi}{2}}$$

On a l'allure suivante :



5 - On a montré que la pulsation de résonance est $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}} < \omega_0$.

La question est de trouver Q pour avoir $\omega_r = 0{,}99\omega_0$.

Ceci s'écrit aussi : $\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}} = 0{,}99$.

Soit donc $1-\dfrac{1}{2Q^2} = 0{,}99^2$, soit donc $\dfrac{1}{2Q^2} = 1-0{,}99^2$,

soit donc $2Q^2 = \dfrac{1}{1-0{,}99^2}$,

d'où $Q = \sqrt{\dfrac{1}{2(1-0{,}99^2)}} = 5$.

IV Détermination d'une inductance

1 - $\underline{Z} = R + r + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}R}{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}+R} = R + r + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}$.

2 - Sur la voie X, il s'agit de la tension u_Z aux bornes de $\underline{Z}$.

Sur la voie Y, il s'agit de $u_R = Ri$, donc d'un signal proportionnel au courant i_z qui traverse $\underline{Z}$.

Or $\underline{u_Z} = \underline{Z}\underline{i_Z}$, donc ces deux signaux sont en phase si et seulement si $\underline{Z}$ est réelle. Donc si sa partie imaginaire est nulle.

Or $\underline{Z} = R + r + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega} = R + r + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{R(1-\mathrm{j}RC\omega)}{1+(RC\omega)^2}$.

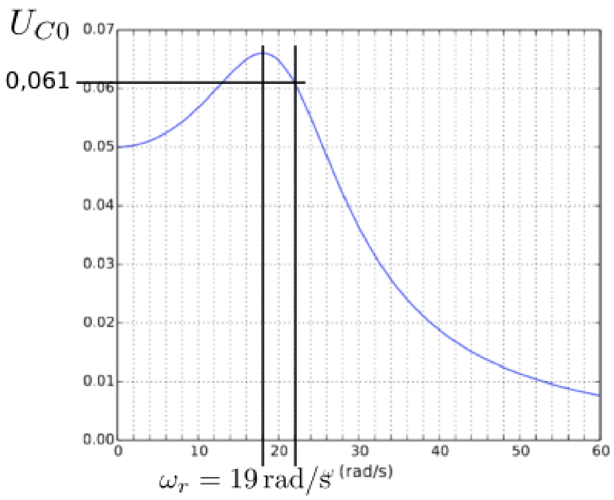
Donc $\mathrm{Im}(\underline{Z}) = L\omega - \dfrac{R^2C\omega}{1+(RC\omega)^2}$.

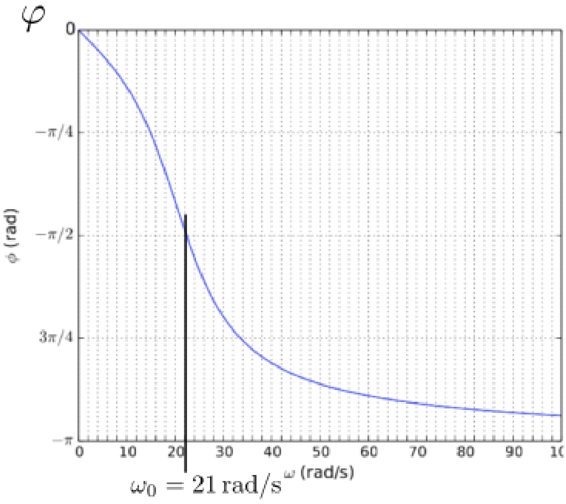
On a donc $\boxed{L = \dfrac{R^2C}{1+(RC\omega)^2}}$.

Avec $\omega = 2\pi f$ et les valeurs de l'énoncé, on obtient $L = 44\,\mathrm{mH}$.

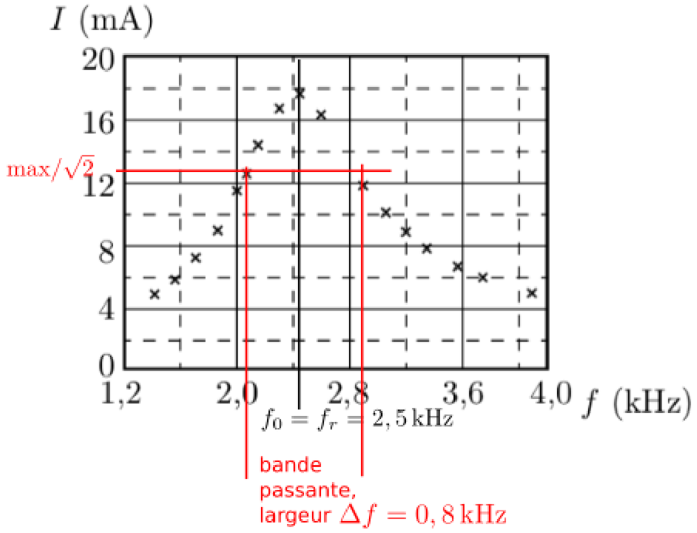
V Étude de graphes d'amplitude et de phase

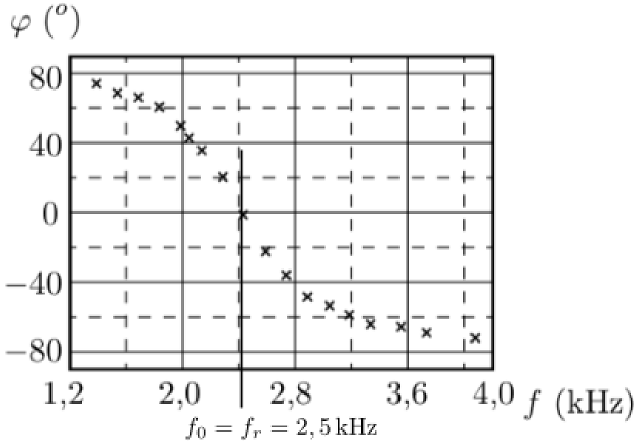
a/





b/





⋆ Cas a/ : c'est une résonance en tension.
On a les expressions (cf cours, pas à connaître par cœur du tout mais à aller chercher dans le poly) :

$$\boxed{U_{C0} = |\underline{U}_{C0}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = \varphi_{u_C} - \varphi_e = \arctan\frac{Q(1-x^2)}{x} - \frac{\pi}{2}.}$$

– Concernant la pulsation propre : la phase vaut $-\pi/2$ à la pulsation propre ($x = 1$). On lit donc sur le graphe de phase la pulsation propre $\omega_0 = 21\,\mathrm{rad/s}$.
– Concernant ω_r : c'est là où l'amplitude est maximale. On lit donc $\omega_r = 19\,\mathrm{rad/s}$.
– Concernant Q : on a $U_{C0}(x=1) = U_{C0}(x=0) \times Q$, on a donc $Q = \dfrac{U_{C0}(x=1)}{U_{C0}(x=0)} = \dfrac{0{,}061}{0{,}05} = 1{,}2$.

⋆ Cas b/ : c'est une résonance en intensité.

On a les expressions (cf poly) :

$$\boxed{I_0 = |\underline{I}_0| = \frac{E_0/R}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = \varphi_i - \varphi_e = -\arctan\left(Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right).}$$

– On résonne avec les fréquences étant donné que l'abscisse du graphique est en fréquence.
– On sait que la résonance a lieu à la fréquence propre : $f_0 = f_r$. C'est là où l'amplitude est maximale, et aussi là où le déphasage est nul, ce qui se détermine facilement sur le graphique : $f_0 = f_r = 2{,}5\,\text{kHz}$.
– Concernant Q, il faut utiliser la bande-passante et la formule $Q = \dfrac{f_0}{\Delta f}$ (cf construction sur le graphique). A.N. : $Q = 3{,}1$.

VI Antenne émettrice

1 - On regroupe la résistance, la bobine et le condensateur, qui sont tous les trois en parallèles, en une impédance équivalente $\underline{Z}$ donnée par :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega = \frac{\mathrm{j}L\omega + R + (\mathrm{j}C\omega)R(\mathrm{j}L\omega)}{\mathrm{j}RL\omega}.$$

D'où

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}.}$$

2 - On a $\dfrac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \underline{Z}$, donc $\underline{U}_0 = \underline{Z}\times\underline{I}_0 = \underline{Z}\times I_0$ (car $\underline{I}_0 = I_0$, il n'y a pas de phase à l'origine), donc :

$$\underline{U}_0 = \frac{I_0\,\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}.$$

Pour la suite, il est plus futé de tout diviser par $\mathrm{j}L\omega$ afin de retrouver une fonction du type de celle pour le RLC série :

$$\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1+\frac{R}{\mathrm{j}L\omega}+\mathrm{j}RC\omega}$$

$$\boxed{\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1+\mathrm{j}R\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)}.}$$

3 - On a $U = |\underline{U}_0| = \dfrac{RI_0}{\sqrt{1+R^2\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}}$.

Il faut chercher le maximum. Il est atteint lorsque le dénominateur est minimum (car pas de ω au numérateur). C'est ici assez simple : c'est lorsque $\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2 = 0$, donc pour $\boxed{\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}.}$

C'est donc cette pulsation là qu'il faut utiliser.

4 - On définit $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $x = \omega : \omega_0$. On a alors

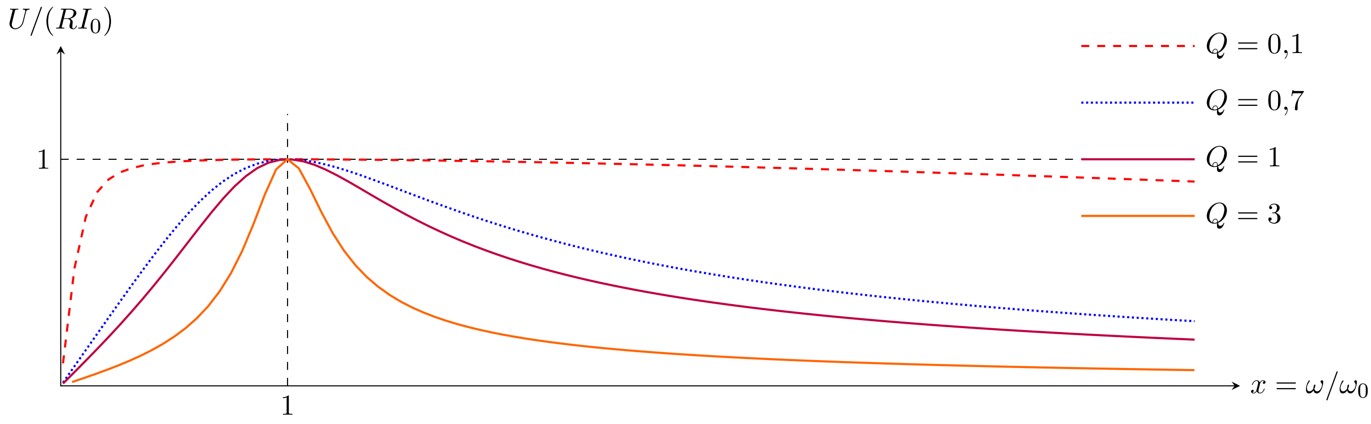
$$\begin{aligned}
C\omega - \frac{1}{L\omega} &= \frac{C\sqrt{L}\omega}{\sqrt{L}} - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}L\omega}\\
&= \frac{\sqrt{C}\sqrt{C}\sqrt{L}\omega}{\sqrt{L}} - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}\sqrt{L}\sqrt{L}\omega}\\
&= \frac{\sqrt{C}\omega}{\sqrt{L}\omega_0} - \frac{\sqrt{C}\omega_0}{\sqrt{L}\omega}\\
&= \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}\left(x-\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1 + \mathrm{j}R\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

On pose $Q = R\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}$. On a

$$U = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$



5 - Il faut trouver l'expression des pulsations de coupures ω_{c1} et ω_{c2}.

On note $x_1 = \omega_{c1}/\omega_0$ et $x_2 = \omega_{c2}/\omega_0$ les pulsations réduites correspondantes.

Elles sont solutions de $U(x) = \dfrac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{RI_0}{\sqrt{2}}$.

Ceci est équivalent à $Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 = 1$, soit tous calculs faits et en éliminant les solutions négatives, pour

$$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}, \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}.$$

La largeur de la bande passante est $\Delta x = x_2 - x_1 = \dfrac{1}{Q}$, soit encore $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}.}$

Remarque : On a $\varphi = \pm\pi/4$ pour x_1 et x_2.

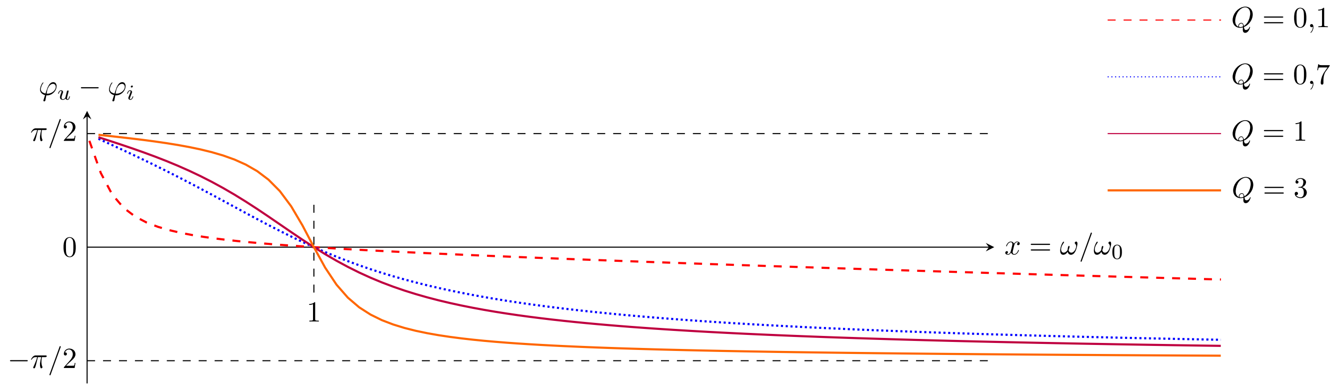
On a $\boxed{A_c = Q = R\dfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}} = 5{,}2.}$

L'acuité augmente avec la résistance. C'est normal car la résistance est en parallèle avec le reste du circuit, donc une absence de résistance signifie ici une résistance R infinie (pour qu'aucun courant ne la traverse).

6 - Le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$ est donné par l'argument de $\underline{U}_0$.

En effet, $\varphi_u - \varphi_i = \varphi_u$ car $\varphi_i = 0$, et $\varphi_u = \arg(\underline{U}_0)$.

$$\boxed{\varphi = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right).}$$



Remarque : le déphasage φ est nul à la résonance. $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase.

VII Étude d'un circuit en RSF

1 - $\underline{Z} = \dfrac{\underline{Z_1}\,\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} = \dfrac{(\mathrm{j}L\omega + R)\left(\frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + R\right)}{2R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega}$.

2 - On a $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ et $\underline{u} = \underline{Z_1}\,\underline{i_1}$, donc $\underline{i_1} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{Z_1}} = \dfrac{\underline{Z}\,\underline{i}}{\underline{Z_1}}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{i_1} = \frac{\underline{Z}\,\underline{i}}{R + \mathrm{j}L\omega}.}$$

De même, $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ et $\underline{u} = \underline{Z_2}\,\underline{i_2}$, donc $\underline{i_2} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{Z_2}} = \dfrac{\underline{Z}\,\underline{i}}{\underline{Z_2}}$.

$$\Rightarrow \boxed{\underline{i_2} = \frac{\underline{Z}\,\underline{i}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}.}$$

Remarque : avec un diviseur de courant, on a : $\underline{i_1}(t) = \underline{i}(t) \times \dfrac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + R}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$ et $\underline{i_1}(t) = \underline{i}(t) \times \dfrac{\mathrm{j}L\omega + R}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$.

3 - ⋆ Si $\underline{I_1}/\underline{I_2} = \mathrm{j}\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\arg(\underline{I_1}/\underline{I_2}) = \pm\pi/2$.
Or $\arg(\underline{I_1}/\underline{I_2}) = \varphi_1 - \varphi_2$ est justement le déphasage de i_1 par rapport à i_2, d'où le résultat.

⋆ En utilisant q2 : $\dfrac{\underline{I_1}}{\underline{I_2}} = \dfrac{\underline{i_1}}{\underline{i_2}} = \dfrac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + R}{\mathrm{j}L\omega + R} = \dfrac{(-\mathrm{j}L\omega + R)\left(\frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + R\right)}{(\mathrm{j}L\omega + R)(-\mathrm{j}L\omega + R)} = \dfrac{R^2 - \frac{L}{C} - \mathrm{j}R\left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)}{(L\omega)^2 + R^2}$.

C'est un imaginaire pur lorsque $\boxed{R^2 = \dfrac{L}{C}.}$

Remarque : $\dfrac{\underline{i_1}}{\underline{i_2}} = \dfrac{\underline{I_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\underline{I_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} = \dfrac{\underline{I_1}}{\underline{I_2}}$.

4 - Cette fois, ce sont les modules qui doivent être égaux : $|\underline{I_1}| = |\underline{I_2}|$.

Avec q2, ceci s'écrit aussi $\dfrac{1}{(C\omega)^2} + R^2 = (L\omega)^2 + R^2$, soit donc $\dfrac{1}{C\omega} = L\omega$, soit donc $\boxed{\omega^2 = \dfrac{1}{LC}.}$