Devoir Surveillé

Correction – Physique-chimie – DS 3

I Suspension de voiture

Première partie : suspension sans amortissement

1 - Système {véhicule}. Bilan des forces :

– Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$,
– action du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$.

Le véhicule ne touche pas le sol, il n'y a donc pas de force de réaction du sol.

2 - À l'équilibre la somme des forces est nulle, donc $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$, d'où $-mg - k(z_e - l_0) = 0$, d'où $\boxed{z_e = l_0 - \frac{mg}{k}.}$

3 - Référentiel d'étude supposé galiléen, PFD appliqué au système {véhicule} :
$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P}$. Or ici $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$. Donc on a

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - k(z - l_0)\vec{e}_z.$$

On projette sur $\vec{e}_z$, on réarrange :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \underbrace{-g + \frac{kl_0}{m}}_{z_e \times k/m}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}z_e.}$$

4 - Il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique : on pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ pour avoir $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$.

La solution de l'équation homogène est $z_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Celle de l'équation particulière est $z_P = z_e$.

On a donc $\boxed{z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + z_e.}$

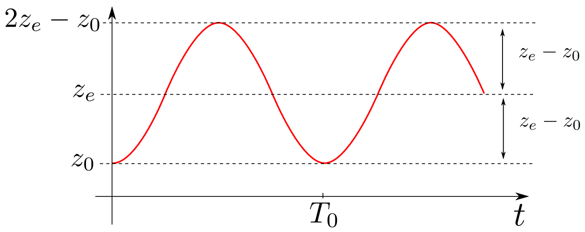
On a $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\,\text{rad/s}}$ et $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}63\,\text{s}.}$

5 - CI1 : $z(0) = z_0$. Or $z(0) = A + z_e$, donc $A = z_0 - z_e < 0$.

CI2 : $\dot{z}(0) = 0$. Or $\dot{z}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ et donc $\dot{z}(0) = B\omega_0$. Conclusion : $B = 0$.

On a donc $\boxed{z(t) = (z_0 - z_e)\cos\omega_0 t + z_e.}$

6 - Il s'agit de l'opposé d'un cosinus (car $z_0 - z_e < 0$), centré autour de z_e. La valeur minimale est à $t = 0$, avec $z(0) = z_0$.



Deuxième partie : suspension avec amortissement

7 - $F = hv$ donc l'unité de h est $[h] = \dfrac{[F]}{[v]} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

Or par exemple $F = ma$ donc $[F] = \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$, donc $[h] = \dfrac{\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$, soit donc $\boxed{[h] = \mathrm{kg \cdot s^{-1}}.}$

8 - Système {véhicule}. Bilan des forces :

– Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$,
– action du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$,
– amortisseur : $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{e}_z$.

À l'équilibre, $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0}$. Or comme $\vec{f} = \vec{0}$ à l'équilibre, on retrouve la même chose que dans la partie précédente, c'est-à-dire une côte à l'équilibre $z = z_e = l_0 - mg/k$.

9 - Référentiel d'étude supposé galiléen, PFD appliqué au système {véhicule} :

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{f}$. Or ici $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$. Donc on a

$$m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - k(z - l_0)\vec{e}_z - h\dot{z}\vec{e}_z.$$

On projette sur $\vec{e}_z$, on réarrange :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \underbrace{-g + \frac{kl_0}{m}}_{z_e \times k/m}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}z_e.}$$

10 - Il s'agit d'une équation du second ordre. On calcule le discriminant de l'équation caractéristique :

$$\Delta = \frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = \frac{h^2 - 4km}{m^2}.$$

Ainsi on a régime apériodique si $\Delta > 0$, si $h^2 > 4km$.

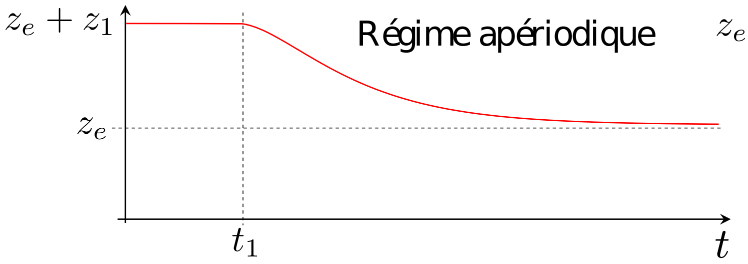
Régime critique pour $\Delta = 0$, donc pour $h^2 = 4km$.

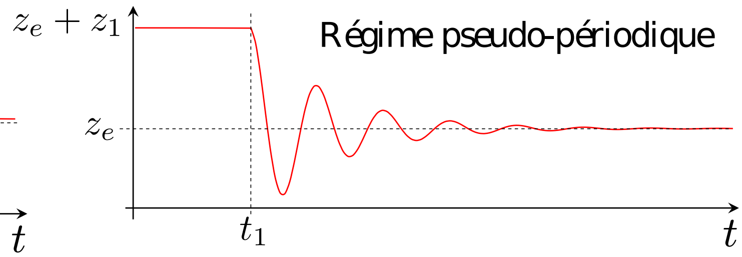
Régime pseudo-périodique si $\Delta < 0$, si $h^2 < 4km$.

11 - 1 - L'amortissement est d'abord en régime critique, donc $h^2 = 4km$. Ensuite le véhicule est chargé, donc m augmente, donc $4km$ devient supérieur à h^2 et on entre en régime pseudo-périodique.

2 - Il n'est pas souhaitable d'être en régime pseudo-périodique, car alors il y a de nombreuses oscillations. Il faut donc choisir h pour avoir $h^2 > 4km$ avec m la masse maximale du véhicule chargé.

12 - Il s'agit d'étudier la réponse à un échelon, c'est-à-dire de spécifier la nature du régime transitoire de retour à l'équilibre. On a dans les deux cas une hauteur z_e par rapport à la route pour $t < t_1$ et aussi pour $t \gg t_1$.





Ceci correspond par exemple à la descente d'un trottoir, et le cas pseudo-périodique n'est pas souhaitable pour une voiture !

Troisième partie : analogie avec le circuit RLC série

13 - Loi des mailles : $u_C + u_R + u_L = E$.

On utilise $u_R = Ri = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$ pour avoir :

$$u_C + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} = E, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{=\omega_0/Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{=\omega_0^2}u_C = \frac{E}{LC}.}$$

14 - On identifie $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et après calculs $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}.}$

15 - ω_0 est la pulsation propre (rad/s) et Q le facteur de qualité (sans unité).

16 - On fait l'analogie $\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\dfrac{\sqrt{km}}{h} = Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

On voit qu'on peut poser $h = R$, et alors on a $k = 1/C$ et $L = m$.

17 - $\star$ Solution particulière constante donc il reste $0 + 0 + \omega_0^2 u_{C,\mathrm{part}} = \omega_0^2 E$.

$\star$ Solution homogène $u_{C,\mathrm{hom}} = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}$.

On obtient Ω et μ en écrivant les racines du polynome caractéristique comme $-\mu \pm \mathrm{i}\Omega$:

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}}.$$

On a donc $\boxed{\mu = \dfrac{\omega_0}{2Q}}$ et $\boxed{\Omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}.}$

Bilan : $u_C(t) = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + E$.

II Bulles de champagne

18 - Poids $mg = \rho_{CO_2} V g$. On a donc :

$$\frac{\text{poids}}{\text{poussée d'Archimède}} = \frac{\rho_{CO_2} V g}{\rho_{\text{liq}} V g} = \frac{1{,}78}{1000} \ll 1.$$

19 - Bilan des forces sur le système {bulle} :

- Poids, négligé.
- Poussée d'Archimède, $\vec{\Pi} = \rho_{\text{liq}} V g\, \vec{e}_z$ (elle est bien dirigée vers le haut).
- Frottement $\vec{f} = -6\pi\eta r \|\vec{v}\|\, \vec{e}_z$ (signe moins car la bulle monte, et les frottements s'y opposent).
  S'écrit aussi : $\vec{f} = -6\pi\eta r v\, \vec{e}_z$.

PFD : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Pi} + \vec{f}$. On remplace (en particulier $\vec{v} = v\vec{e}_z$). On projette sur $\vec{e}_z$, pour avoir :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -6\pi\eta r\, v + \rho_{\text{liq}} V g$$

On réarrange :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{6\pi\eta r}{m}}_{=1/\tau}\, v = \underbrace{\frac{\rho_{\text{liq}} V g}{m}}_{=v_{\text{lim}}/\tau}.}$$

20 - On utilise $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ et $m = \rho_{CO_2} V$, pour obtenir :

$$\tau = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{CO_2}}{6\pi\eta r}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\tau = \frac{2r^2 \rho_{CO_2}}{9\eta}.}$$

$$\frac{v_{\text{lim}}}{\tau} = \frac{\rho_{\text{liq}} V g}{\rho_{CO_2} V}, \quad \text{soit} \quad v_{\text{lim}} = \frac{2r^2\rho_{CO_2}}{9\eta} \times \frac{\rho_{\text{liq}} g}{\rho_{CO_2}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{v_{\text{lim}} = \frac{2r^2 \rho_{\text{liq}} g}{9\eta}.}$$

21 - Dans l'équation du mouvement, les termes $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{v}{\tau}$ ont la même dimension, donc $[\tau] =$ seconde.

22 - $\star$ $v(t) = A\exp^{-t/\tau} + v_{\text{part}}$.

$v_{\text{part}} = \text{cst}$ donc il reste $0 + \dfrac{v_{\text{part}}}{\tau} = \dfrac{v_{\text{lim}}}{\tau}$, d'où $v_{\text{part}} = v_{\text{lim}}$ et donc

$$\boxed{v(t) = A\exp^{-t/\tau} + v_{\text{lim}}.}$$

$\star$ Vitesse nulle au départ donc $0 = A + v_{\text{lim}}$ et donc $A = -v_{\text{lim}}$.

Finalement : $\boxed{v(t) = v_{\text{lim}}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right).}$

23 - $\tau = 3{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$ est petit devant le temps de montée de la bulle, donc on peut supposer que la vitesse limite est tout de suite atteinte.

Rq : on obtient aussi $v_{\text{lim}} = 1{,}71\,\mathrm{m/s}$.

24 - `nb_iterations = fin/dt`.

25 - Dans l'équation à résoudre, on remplace $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ par $(v(t+\mathrm{d}t) - v(t))/\mathrm{d}t$:

$$\frac{v(t+\mathrm{d}t) - v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau},$$

et on isole $v(t+\mathrm{d}t)$:

$$v(t+\mathrm{d}t) = v(t) + \mathrm{d}t \times (\frac{v_{\text{lim}}}{\tau} - \frac{v}{\tau}).$$

On a donc l'actualisation suivante : `v = v + dt*(vlim-v)/tau`.

Quant au temps, le nouveau temps est simplement augmenté de $\mathrm{d}t$: `t = t + dt`.

26 - `plt.plot(liste_t,liste_v)`.

27 - $z(t)$ est obtenu à partir de la vitesse, car $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v$. Ceci donne $\dfrac{z(t+\mathrm{d}t) - z(t)}{\mathrm{d}t} = v$, soit donc $z(t+\mathrm{d}t) = z(t) + v \times \mathrm{d}t$.

Il faut donc :

initialiser `liste_z=[0]` et `z=0` ligne 16.

Ligne 22, ajouter `z = z + dt*v`.

Ligne 26, ajouter `liste_z.append(z)`.