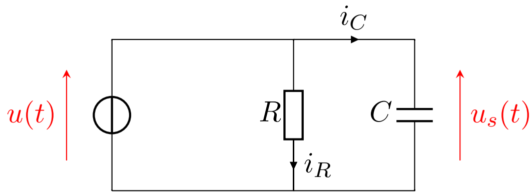
Étude des systèmes linéaires
Chapitres 1 à 3

Correction – TD – Autres exercices

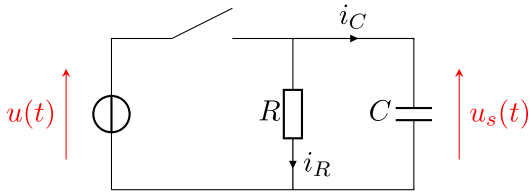
I Production d'une tension continue à partir d'une tension sinusoïdale

1. Schéma équivalent :



On a donc $\boxed{u_s = u.}$

2. Schéma équivalent ci-contre.
C'est un simple circuit RC :



Loi des nœuds : $$i_C + i_R = 0$$

Lois de comportement : $$C\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \frac{u_s}{R} = 0$$

Forme canonique : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_s = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC\,.}$$

La solution particulière est nulle, donc la solution est de la forme $u_s(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

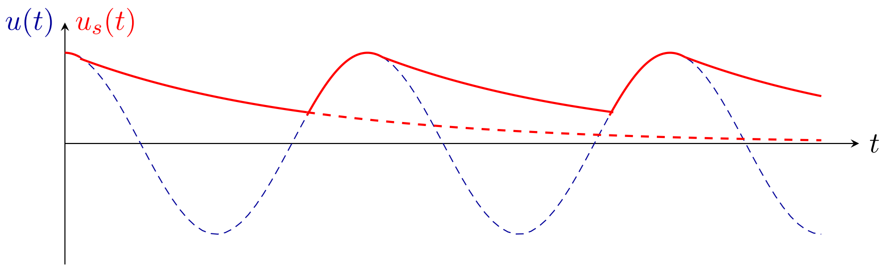
Enfin, $u_s(0^+) = u_s(0^-) = U_0$ d'après la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, donc :

$$\boxed{u_s(t) = U_0\mathrm{e}^{-t/\tau}.}$$

3. On trace d'abord $u(t)$ (simple cosinus). L'énoncé indique que la diode est bloquée à $t = 0$, donc d'après les questions précédentes u_s correspond à la décharge d'un condensateur. Ceci a lieu jusqu'à ce que $u_s(t)$ devienne égal à $u(t)$.

À ce moment là, la diode devient passante. On a alors (questions précédentes) $u_s(t) = u(t)$. Ainsi $u_s(t)$ augmente jusqu'à atteindre un maximum, moment où elle redevient bloquée : on recommence alors comme au départ.

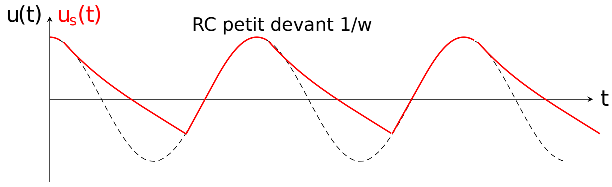
Remarque : la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue, donc u_s garde la même valeur lorsque la diode change d'état.

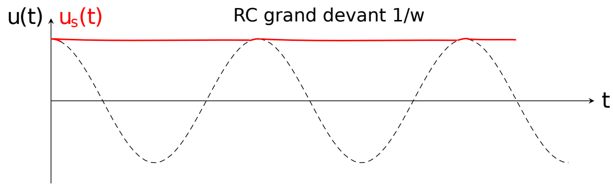


4. Si $\tau = RC$ est très faible, alors lorsque la diode est bloquée la tension u_s tend très vite vers 0. On a donc un signal $u_s(t)$ qui n'est pas du tout constant.

Si τ est très élevé, alors la décroissance exponentielle est très lente, et le signal u_s reste quasiment constant, égal au maximum du signal $u(t)$, donc égal à l'amplitude u_m : c'est justement ce qui était recherché.

On doit donc avoir $\boxed{RC \gg 1/\omega}$ afin que le signal u_s soit une tension continue proportionnelle à l'amplitude u_m.





II Deux ressorts verticaux

1. Axe z orienté vers le bas. À l'équilibre les forces exercées sur chacune des masses se compensent.

- La masse m_1 est soumise à
  - son poids $\vec{P}_1 = +m_1 g \vec{u}_z$;
  - la force de rappel du ressort 1 : $\vec{F}_1 = -k_1\,\Delta\ell_{1,\text{éq}}\,\vec{u}_z$;
  - le force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_2 = -k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}}(-\vec{u}_z) = k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}}\,\vec{u}_z$.

  Ainsi, en projection sur l'axe z,
$$m_1 g - k_1\,\Delta\ell_{1,\text{éq}} + k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}} = 0 \tag{1}$$
- La masse m_2 est soumise à
  - son poids $\vec{P}_2 = +m_2 g \vec{u}_z$;
  - aucune force de la part du ressort 1 puisqu'il n'est pas attaché à m_2 ;
  - la force de rappel du ressort 2 $\vec{F}'_2 = -k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}}\vec{u}_z$.

  Ainsi, en projection sur l'axe z,
$$m_2 g - k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}} = 0\,. \tag{2}$$
- On en conclut : $\boxed{\Delta\ell_{2,\text{éq}} = \dfrac{m_2 g}{k_2}}$ puis $k_1\,\Delta\ell_{1,\text{éq}} = m_1 g + k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}} = (m_1+m_2)g$ d'où $\boxed{\Delta\ell_{1,\text{éq}} = \dfrac{(m_1+m_2)g}{k_1}}$.

2. Comme l'axe z est orienté vers le bas et que les positions sont comptées par rapport à la position d'équilibre, alors
$$\boxed{\Delta\ell_1 = \Delta\ell_{1,\text{éq}} + z_1 \quad \text{et} \quad \Delta\ell_2 = \Delta\ell_{2,\text{éq}} - z_1 + z_2\,.} \tag{3}$$
De plus, les accélérations des masses m_1 et m_2 s'écrivent directement $\dfrac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2}$ car tous les autres termes de leur position sont des constantes. Ainsi, le même bilan de forces que précédemment et le PFD conduisent aux équations différentielles
$$m_1\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} = m_1 g - k_1\,\Delta\ell_1 + k_2\,\Delta\ell_2 \quad \text{et} \quad m_2\frac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2} = m_2 g - k_2\,\Delta\ell_2\,. \tag{4}$$
En remplaçant les allongements par leurs expressions,
$$m_1\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} = m_1 g - (m_1+m_2)g - k_1 z_1 + m_2 g - k_2 z_1 + k_2 z_2 \quad \text{et} \quad m_2\frac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2} = m_2 g - m_2 g + k_2 z_1 - k_2 z_2 \tag{5}$$
et enfin en simplifant
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_1+k_2}{m_1} z_1 = \frac{k_2}{m_1} z_2 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_2}{m_2} z_2 = \frac{k_2}{m_2} z_1\,.} \tag{6}$$

3. La masse m_2 est maintenue dans sa position d'équilibre, donc $z_2 = 0$. L'équation du mouvement de m_1 devient alors
$$\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_1+k_2}{m_1} z_1 = 0\,. \tag{7}$$
Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m_1}}$, qu'on peut résoudre simplement (avec les CI) pour arriver à
$$\boxed{z_1(t) = Z_\text{d}\cos(\omega_0 t)\,.} \tag{8}$$