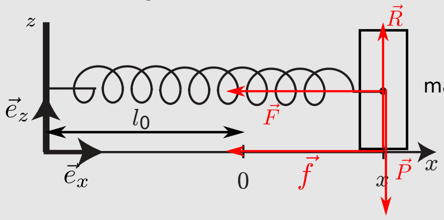
Étude des systèmes linéaires
Chapitre 3

Régime transitoire des systèmes du 2$^{\text{nd}}$ ordre

Oscillateurs amortis

I Exemple d'oscillateur amorti : le système masse-ressort avec frottements visqueux

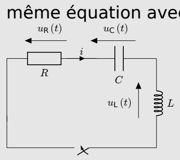
1 - Mise en équation



masse m → équation du type

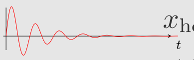
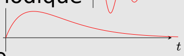
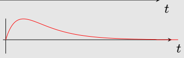
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha$$

et en remarque : même équation avec le circuit RLC série



2 - Résolution

discriminant + racines...

- $Q > 1/2$ pseudo-périodique  $x_{\text{hom}}(t) = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\ \mathrm{e}^{-\mu t}$
- $Q = 1/2$ critique  $x_{\text{hom}}(t) = (At + B)\ \mathrm{e}^{-\mu t}$
- $Q < 1/2$ apériodique  $x_{\text{hom}}(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$

3 - Un exemple avec d'autres CI

4 - Allure des solutions quand il y a un second membre

II Exemple du circuit RLC série → TD

Ce qu'il faut connaître

(cours : I et II)

▶$_1$ Quelle est l'équation qui caractérise un oscillateur harmonique amorti ? (écrite sous forme canonique : en faisant intervenir la pulsation propre et le facteur de qualité).

▶$_2$ Donner les trois types de régimes transitoires observables pour un oscillateur harmonique amorti en fonction de la valeur du facteur de qualité.

Tracer pour chacun des régimes précédents l'allure de la réponse en fonction du temps (on prendra par exemple $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$).

▶$_3$ Dans quel cas le régime transitoire est-il le plus bref ? Donner alors l'ordre de grandeur de sa durée en fonction de la pulsation propre.

▶$_4$ Quelle est le paramètre qui donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations dans le régime transitoire pseudo-périodique ?

Quelle est l'expression de la durée approximative d'une oscillation si Q est assez grand (en fonction de ω_0) ?

Ce qu'il faut savoir faire

▶$_5$ **Étude d'un système du second ordre en régime transitoire amorti :** → **EC1**, **EC2**, TD I, II, III

- obtenir l'équation du mouvement, l'écrire sous forme canonique pour identifier le facteur de qualité et la pulsation propre,
- la résoudre complètement pour une valeur du facteur de qualité Q donnée (les conditions initiales étant données, par exemple $x(t = 0) = 0$ et $v(t = 0) = v_0$),
- tracer l'allure de la solution.

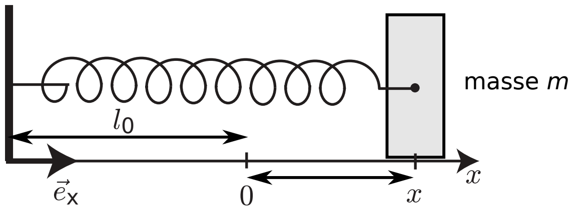
▶$_6$ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. → cours I

Exercices de cours

Remarque : les exercices de cours ci-dessous concernent le système masse-ressort horizontal. Il faut également savoir traiter la même chose pour la décharge ou la charge du circuit RLC

→ **En conséquence, les exercices I et II du TD sont aussi considérés comme des exercices de cours.**

Exercice C1 – Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort avec frottements



On considère le système ci-contre. On se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements sont modélisés par une force s'exerçant sur la masse dont l'expression est $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, $\lambda > 0$ étant une constante. Le ressort est de raideur k et de longueur à vide l_0.

1 - Faire un bilan des forces sur le système {masse}, appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation portant sur la position $x(t)$.

2 - Mettre cette équation sous forme canonique, donner alors l'expression du facteur de qualité et de la pulsation propre en fonction de λ, m et k.

Correction

1 - ⋆ Système : {masse}. Bilan des forces :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$.
- Réaction du support : $\vec{N} = N\vec{e}_z$ (rien selon $\vec{e}_x$ car on ne tient pas compte des frottements).
- Force du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}}$ avec ici $l = l_0 + x$ (c'est la longueur totale du ressort) et $\vec{u}_{\text{ext}} = \vec{e}_x$ (va du point d'attache du ressort vers l'extérieur).
  D'où $\vec{F} = -k((l_0 + x) - l_0)\vec{e}_x = -kx\,\vec{e}_x$.
- Frottements : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, or $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$, donc $\vec{f} = -\lambda\dot{x}\,\vec{e}_x$.

⋆ Accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$ car mouvement selon x uniquement.

⋆ PFD sur la masse : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f}$.

On projète sur $\vec{e}_x$ donc il reste $m\ddot{x} = -k\,x - \lambda\dot{x}$, soit $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{\lambda}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}\,x = 0.}$

2 - Forme canonique : $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec ici par identification :

- $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ donc $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}.}$

- $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\lambda}{m}$ donc $Q = \omega_0\dfrac{m}{\lambda} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\dfrac{m}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\dfrac{\sqrt{m}\sqrt{m}}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{k}\sqrt{m}}{\lambda}$.

Donc $\boxed{Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\lambda}.}$

Exercice C2 – Résoudre l'équation de l'oscillateur amorti, les CI étant données

On reprend le cas de l'EC 1 et ses résultats, en particulier l'équation différentielle sur $x(t)$: $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

On se donne des conditions initiales suivantes : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

Dans chacun des trois cas, résoudre l'équation du mouvement pour obtenir la solution $x(t)$. On déterminera l'expression des constantes d'intégration. On tracera l'allure de la solution.

1 - Cas $Q > 1/2$.

2 - Cas $Q < 1/2$.

3 - Cas $Q = 1/2$.

Remarque : si votre cours n'est pas clair, il y a une correction de cet EC sur le site de la classe.
Remarque : en colle, seul un des trois cas peut être demandé à la fois.

Correction

1 - Cas où $Q > 1/2$, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

⋆ La solution particulière est nulle.

⋆ Équation homogène : régime pseudo-périodique, le discriminant est négatif et l'équation caractéristique a deux racines complexes $r_\pm = -\mu \pm \mathrm{i}\Omega$. On a alors la solution homogène :

$$x_{\text{hom}}(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\ \mathrm{e}^{-\mu t}.$$

Pour déterminer les expressions de la pseudo-pulsation Ω et du facteur μ il faut trouver les racines de l'équation caractéristique :

- Discriminant $\Delta = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$, < 0 par hypothèse.
- Racine 1 :

$$\begin{aligned} r_- &= \frac{-\dfrac{\omega_0}{Q} - \sqrt{-\Delta}}{2} \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)} \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \end{aligned}$$

- De même, racine 2 : $r_+ = -\dfrac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$.

On identifie :

$$\boxed{\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.}$$

⋆ La solution générale est donc

$$\boxed{x(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\ \mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

⋆ Utilisation CI1 : $x(0) = 0$.
D'après la solution, on a $x(0) = A$.
Donc $A = 0$.

⋆ Utilisation CI2 : $\dot{x}(0) = v_0$.
Il faut dériver la solution (on prend en compte que $A = 0$ tout de suite) $x(t) = B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}$:
$\dot{x}(t) = B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t}$.
Donc $\dot{x}(0) = B\Omega$.
Donc $B\Omega = v_0$, donc $B = \dfrac{v_0}{\Omega}$.

⋆ Finalement :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\Omega}\ \sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

2 - Cas où $Q < 1/2$, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

⋆ La solution particulière est nulle.

⋆ Équation homogène : régime apériodique, le discriminant est positif et l'équation caractéristique a deux racines réelles r_1 et r_2, qui donnent la solution :$x_H(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$.

Le discriminant est $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)$.

Les racines sont

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)} \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2} \\ &= -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \\ r_2 &= -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 + \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \end{aligned}$$

Signes : on a évidemment $r_2 < 0$.

Et pour r_1 : $1 > \sqrt{1-4Q^2}$, donc $r_1 < 0$.

⋆ La solution générale est donc

$$\boxed{x(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}.}$$

⋆ Utilisation CI1 : $x(0) = 0$.

D'après la solution, on a $x(0) = A + B$.

Donc $A = -B$.

⋆ Utilisation CI2 : $\dot{x}(0) = v_0$.

Il faut dériver la solution : $\dot{x}(t) = Ar_1\mathrm{e}^{r_1 t} + Br_2\mathrm{e}^{r_2 t}$.

Donc $\dot{x}(0) = Ar_1 + Br_2$.

Donc $Ar_1 + Br_2 = v_0$. Donc $Ar_1 - Ar_2 = v_0$. Donc $A = \dfrac{v_0}{r_1 - r_2}$ et $B = -A$.

⋆ Finalement :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{r_1 - r_2}\left(\mathrm{e}^{r_1 t} - \mathrm{e}^{r_2 t}\right).}$$

3 - Cas où $Q = 1/2$, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$

⋆ La solution particulière est nulle.

⋆ Équation homogène : régime critique, le discriminant est nul et l'équation caractéristique a une racine double $r_1 = \omega_0$.

La solution est donc $x_H(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$.

⋆ Solution générale : $\boxed{x(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$

⋆ Utilisation CI1 : $x(0) = 0$.

D'après la solution, on a $x(0) = B$.

Donc $\boxed{B = 0.}$

⋆ Utilisation CI2 : $\dot{x}(0) = v_0$.

Il faut dériver la solution $x(t) = At\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$: $\dot{x}(t) = A\mathrm{e}^{-\omega_0 t} + At(-\omega_0)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$.

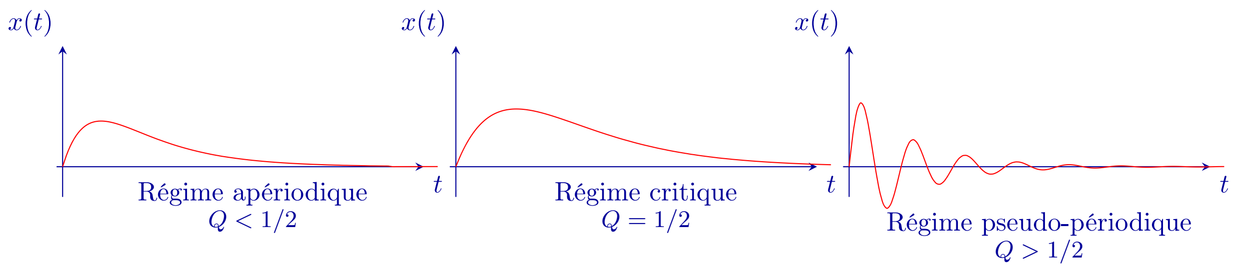
On a donc d'après la solution : $\dot{x}(0) = A$.

Donc $A = v_0$.

⋆ Finalement on a donc

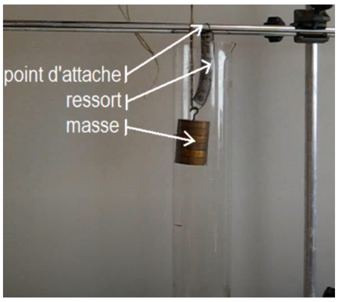
$$\boxed{x(t) = v_0 t\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.}$$

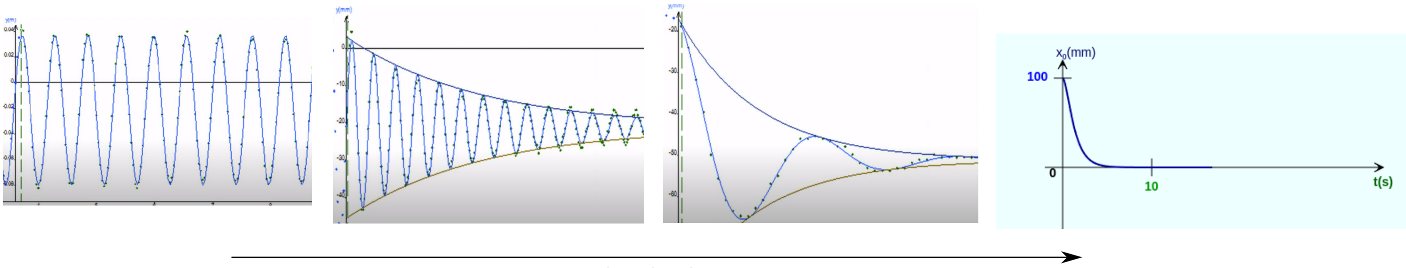
Allure des solutions obtenues :



Expérimentalement, on constate que la présence de dissipation (frottements en mécanique, résistance en électronique) entraîne un **amortissement** du régime transitoire des systèmes.

⋆ **Exemple en mécanique :**



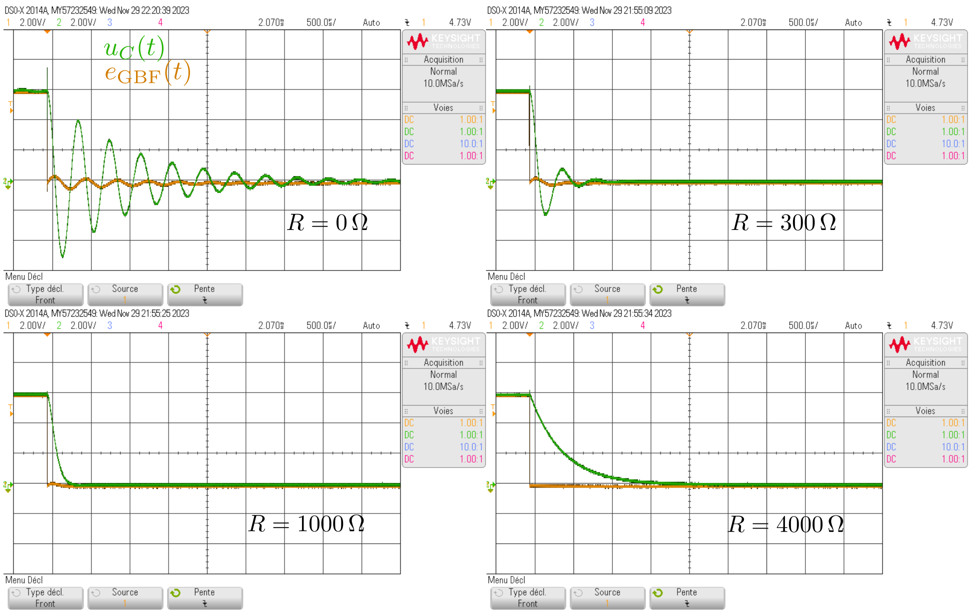


augmentation des frottements

– Lien vers une vidéo montrant les différents régimes d'amortissement pour l'oscillation d'une masse+ressort : cf site classe.
– Animation permettant de régler le facteur de qualité, les CI, et de visualiser l'allure : cf site classe.

⋆ **Exemple en électronique :**

Acquisition de la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série (schéma plus bas). Cf TP.



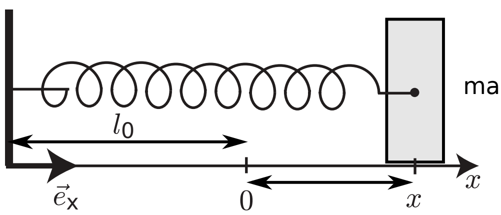
Dans ces deux cas (mécanique, électrique), l'évolution vers l'état final stationnaire se comprend par des considérations énergétiques : l'énergie initiale est dissipée par les frottements ou par effet Joule.

Bilan : sur ces exemples, on constate l'existence de **différents régimes** d'amortissement : avec ou sans oscillations.

→ Nous allons voir comment retrouver théoriquement ces comportements et prédire les temps d'amortissement.

I – Exemple d'oscillateur amorti : le système masse-ressort avec frottements

1 – Mise en équation

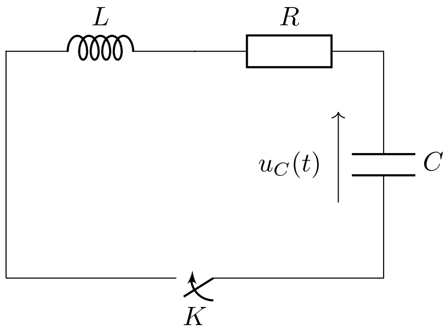


On se place dans le cas d'un système masse-ressort horizontal.

→ Mise en équation : faire l'**EC1**.

→ **Bilan :** on arrive à l'équation $\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = \sqrt{mk}/\lambda$.

Un exemple similaire, le circuit RLC série et l'évolution de $q(t)$:



On étudie le circuit ci-contre, où le condensateur est initialement chargé (charge $q(t=0) = Q_0$). Pour $t < 0$ le circuit est ouvert. Il est refermé à $t = 0$: le condensateur va se décharger.

1 - Exprimer u_c, u_L et u_R en fonction de la charge $q(t)$ du condensateur.

2 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$.

3 - La mettre sous la même forme que pour le système masse-ressort.

$\rightsquigarrow_7$

1 - $u_c = \frac{q}{C}$, $u_R = Ri = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$.

2 - Loi des mailles : $u_C + u_R + u_L = 0$ d'où $\frac{q}{C} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

3 - En divisant par L : $\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$.

On identifie avec la forme canonique : $\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$,

donc $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ c'est-à-dire $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.}$

Et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ donc $Q = \omega_0\frac{L}{R} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{R} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{\sqrt{L}\sqrt{L}}{R} = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$.

D'où $\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$

2 – Résolution de l'équation

Forme canonique pour un système du 2nd ordre

La forme canonique s'écrit :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha}$$

avec :

- α le second membre, constant dans ce chapitre.
- ω_0 la pulsation propre du système. Unité : rad/s

  On définit la fréquence propre $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
- Q le facteur de qualité. Unité : 1

$\rightsquigarrow_8$ Démonstration pour l'unité de Q :

À partir de l'équation, $[\ddot{x}] = [x]\cdot\mathrm{s}^{-2}$ et $[\dot{x}\,\omega_0/Q] = [x]\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}/[Q]$, donc l'égalité des deux donne $[Q] = 1$.

$\rightsquigarrow_9$ Que devient l'équation lorsque $Q \to \infty$? Quelle équation retrouve-t-on ? C'est pour cela que l'on parle de facteur de *qualité*.

On obtient $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha$, équation de l'oscillateur harmonique, pour lequel il n'y a aucune dissipation et des oscillations éternelles.

Méthode : solutions

⋆ **Solution homogène :** pour l'obtenir on écrit le **polynôme caractéristique** $\boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.}$

On cherche son discriminant et ses racines.

- Si $Q < 1/2$: alors le discriminant $\Delta > 0$.
  Les racines du polynôme sont réelles. On les note r_1 et r_2 et on les exprime en fonction de ω_0 et Q.
  La solution homogène est : $\boxed{x_{\text{hom}}(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}.}$
- Si $Q = 1/2$: alors le discriminant $\Delta = 0$.
  Le polynôme possède une racine double. On la note $-\mu$ et on l'exprime en fonction de ω_0 (et $Q = 1/2$).
  La solution homogène est : $\boxed{x_{\text{hom}}(t) = (At + B)\ e^{-\mu t}.}$ (**Remarque :** on obtient en fait $\mu = \omega_0$.)
- Si $Q > 1/2$: alors le discriminant $\Delta < 0$.
  Les racines du polynôme sont complexes. On les exprime en fonction de ω_0 et Q et on les met sous la forme $r_\pm = -\mu \pm \mathrm{i}\Omega$.
  La solution homogène est : $\boxed{x_{\text{hom}}(t) = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\ e^{-\mu t}.}$
  Ω est appelé la pseudo-pulsation. $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ est la pseudo-période.

⋆ **Solution particulière :** on la suppose constante, il reste donc $0 + 0 + \omega_0^2 x = \alpha$, d'où $x_{\text{part}} = \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}$. (ceci fonctionne seulement si α est une constante)

⋆ Solution générale : $x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}$.

⋆ On détermine A et B avec les deux conditions initiales.

Voir aussi la fiche mathématique sur les équations différentielles.

$\rightsquigarrow_{10}$ Montrer qu'on a en effet $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$.

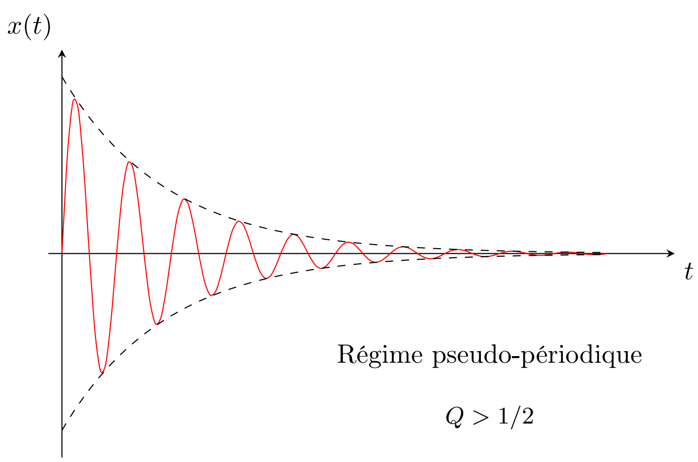
$\Delta = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{Q^2} < 4 \Leftrightarrow Q^2 < 1/4 \Leftrightarrow Q > 1/2$.

→ Mise en pratique : faire l'**EC2**.

Bilan dans le cas $Q > 1/2$: régime pseudopériodique

Allure (cas 2nd membre nul et CI : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$) :



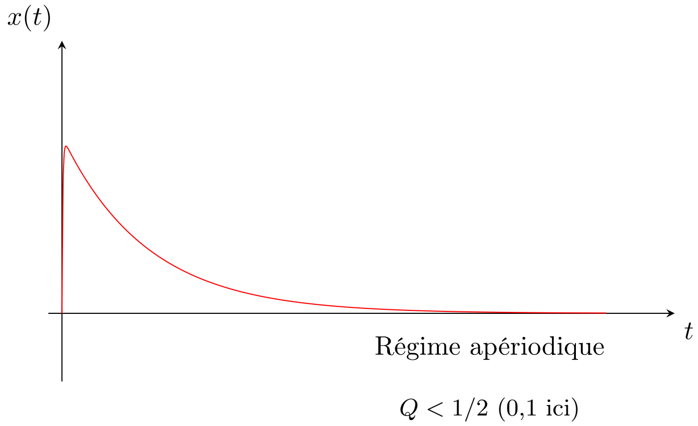
- Ne pas confondre pseudo-pulsation Ω et pulsation propre ω_0.
  Ni la pseudo-période $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ et la période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.
  Sur le graphique, c'est T qui donne la durée entre deux zéros.
- L'enveloppe est une exponentielle décroissante en $e^{-\mu t}$.
  La durée du régime transitoire est de quelques $\tau = 1/\mu$.
- Le nombre d'oscillations est approximativement donné par la valeur de Q.
  (par exemple ci-contre, $Q = 6$)

Remarque : $T \neq T_0$ et $\Omega \neq \omega_0$ car on a montré que $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$.

$\rightsquigarrow_{11}$ Dans quelle limite a-t-on $T \approx T_0$ et $\Omega \approx \omega_0$?
Pour $Q \gg 1$.

Exemple pour $Q = 10$: $\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} = 0{,}999$.

Bilan dans le cas $Q < 1/2$: régime apériodique

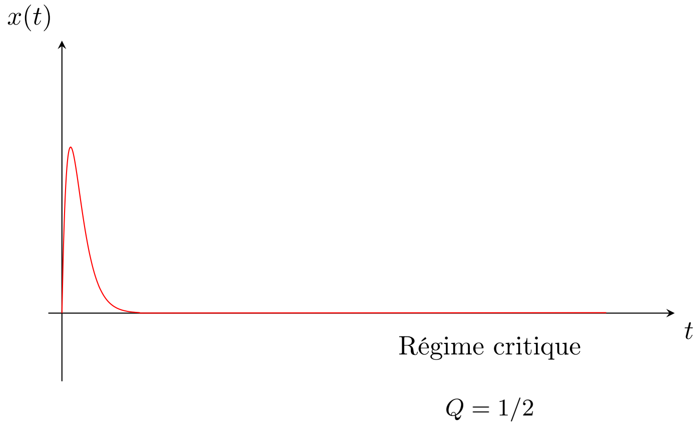


Ci-contre allure (cas 2^{nd} membre nul et CI : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$).

- Deux temps caractéristiques : $\tau_1 = 1/|r_1|$ et $\tau_2 = 1/|r_2|$.

  Soit τ le plus grand des deux. La durée du régime transitoire est de quelques τ.

Bilan dans le cas $Q = 1/2$: régime critique



Ci-contre allure (cas 2^{nd} membre nul et CI : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$).

- La durée du régime transitoire est de quelques $\tau = 1/|r_0| = 1/\omega_0$.

  C'est le régime pour lequel le transitoire est le plus court.

3 – Un exemple avec d'autres CI

a/ Résolution

On reprend le système masse-ressort horizontal, dont l'équation est $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = \sqrt{mk}/\lambda$.

On change les CI : cette fois, $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Prenons par exemple le cas où $Q > 1/2$.

⋆ On a encore la forme générale des solutions : $\boxed{x(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\,\mathrm{e}^{-\mu t} + 0}$ avec $\boxed{\mu = \dfrac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}.}$

⇝ Utiliser les conditions initiales pour obtenir A et B.

⋆ Utilisation CI1 : $x(0) = x_0$.
D'après la solution, on a $x(0) = A$.
Donc $\boxed{A = x_0.}$

⋆ Utilisation CI2 : $\dot{x}(0) = 0$.
Il faut dériver la solution :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t}\right)\\ &= -A\Omega\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + A\cos(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t} + B\Omega\cos(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + B\sin(\Omega t)\,(-\mu)\mathrm{e}^{-\mu t}\end{aligned}$$

Donc $\dot{x}(0) = -A\mu + B\Omega$.

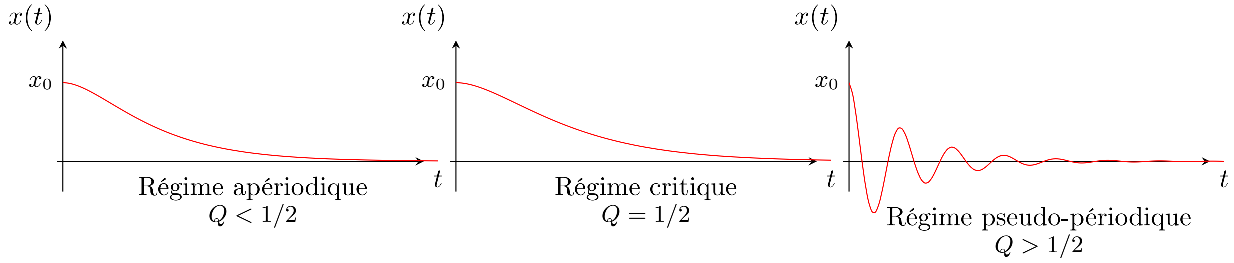
Ceci doit être nul, donc on en déduit que $\boxed{B = A\dfrac{\mu}{\Omega} = x_0\dfrac{\mu}{\Omega}.}$

⋆ Finalement on a donc

$$\boxed{x(t) = x_0\left(\cos(\Omega t) + \frac{\mu}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\,\mathrm{e}^{-\mu t}.}$$

b/ Tracés

Allure des solutions de $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$:



4 – Allure des solutions lorsqu'il y a un second membre

Attention, les solutions ne tendent pas toujours vers 0. C'est le cas seulement si le second membre est nul.

Traçons l'allure des solutions lorsqu'il y a un second membre non nul :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E_0.$$

Ce sera le cas de la charge du circuit RLC (TD II).

Par exemple, conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$. On a :