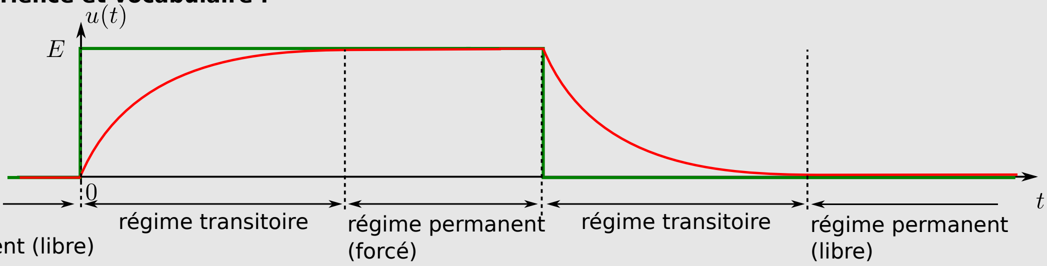
Étude des systèmes linéaires
Chapitre 1

Régime transitoire des systèmes du 1er ordre

I Qu'est-ce qu'un régime transitoire ?

1, 2 - Expérience et vocabulaire :



étude de deux cas particuliers (et d'autres en TD, bobine, etc.)

II Charge du circuit RC

1 - Régime permanent (stationnaire)

- Schéma équivalent (condensateur = int. ouvert, bobine = fil)
- Trouver *i*, *u*

2 - Régime transitoire

a/ Mise en équation

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau} \longrightarrow$$

b/ Solutions

$$u_c(t) = u_h(t) + u_p(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$$

Conditions initiales pour obtenir *A* :

$$0 = u_c(t = 0^-) = u_c(t = 0^+) = A + E$$

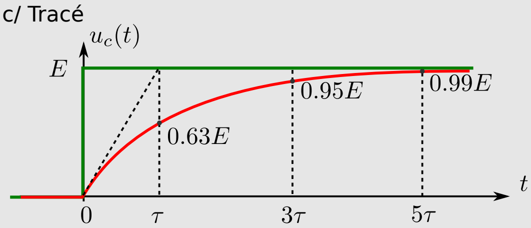
étude du régime permanent

tension continue car condensateur

$$\longrightarrow A = -E$$

$$\longrightarrow u_c(t) = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

c/ Tracé



$\tau = RC$ [s] idée de la durée du transitoire

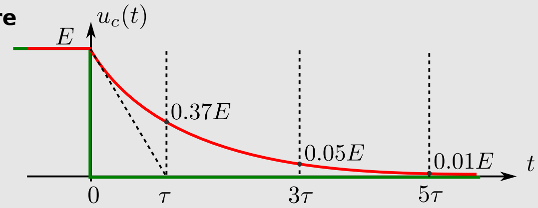
d/ Comparaison avec l'expérience - TP

e/ Évolution de *q(t)* et de *i(t)*

III Décharge du circuit RC

1 - Régime permanent

2 - Régime transitoire



IV Bilans d'énergie

1 - Ex. de la décharge du condensateur

2 - Ex. de la charge du condensateur

3 - Bilan général

$$E_{\text{fournie par génerateur}} = \Delta E_{\text{stockée dans L et C}} + E_{\text{dissipée effet Joule}}$$

Vérification par le calcul direct de :

- $E_{\text{fournie}} = \int_0^{+\infty} u_{\text{gene}}(t) i_{\text{gene}}(t)\mathrm{d}t$ - $E_{\text{dissipee}} = \int_0^{+\infty} u_R(t) i_R(t)\mathrm{d}t$
- $\Delta E_{\text{bob}} = \frac{1}{2} L i_L^2(+\infty) - \frac{1}{2} L\, i_L^2(0)$
- $\Delta E_{\text{cond}} = \frac{1}{2} C u_c^2(+\infty) - \frac{1}{2} C u_c^2(0)$

Ce qu'il faut connaître

▶$_1$ Les résultats du chapitre précédent sur condensateur et bobine (loi de comportement, équivalence en régime continu, continuité de u ou de i, expressions des énergies stockées).

——— (cours : II et III)

▶$_2$ Quelle est la forme canonique d'une équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre (avec le coefficient τ) ? Quelle est la forme des solutions (solution homogène + particulière) ?

——— (cours : IV)

▶$_3$ Connaître la forme générale de l'équation de bilan d'énergie : $E_{\text{fournie}} = \Delta E_{\text{stockée}} + E_{\text{dissipé effet Joule}}$.

Ce qu'il faut savoir faire

——— (cours : I)

▶$_4$ Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent.

Pour le régime permanent préciser s'il est libre ou forcé. → cours, TD

——— (cours : II et III)

▶$_5$ Déterminer les expressions des tensions et courants en régime permanent en remplaçant les bobines et les condensateurs par des interrupteurs ouverts ou des fils. → **EC1**

▶$_6$ Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. → **EC1**

▶$_7$ Résoudre une équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre afin d'obtenir analytiquement la réponse temporelle à un régime libre ou à un échelon. → **EC1**

▶$_8$ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

Pour tous les savoir-faire du II et III, nous avons vu bien d'autres exemple : en cours (II), en TD (charge et décharge de la bobine).

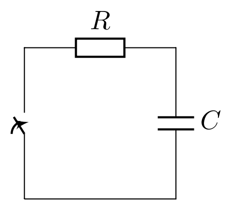
——— (cours : IV)

▶$_9$ Réaliser des bilans énergétiques dans un circuit électrique. → **EC2**

Exercices de cours

Exercice C1 – Étude de la décharge du condensateur

Étude des régimes permanents



1 - Pour $t < 0$ le condensateur est chargé à la charge Q_0. À $t = 0$ l'interrupteur est fermé. Déterminer les expressions de la tension et du courant pour $t < 0$.

Étude du régime transitoire

2 - À $t = 0$ l'interrupteur est fermé. Déterminer l'équation différentielle suivie par la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur pour $t > 0$.

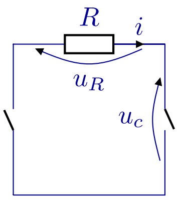
3 - Nous venons d'obtenir l'équation $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{\tau} = 0$.

(i) Donner la forme générale des solutions de cette équation. (ii) Justifier que la condition initiale est $u_c(t = 0^+) = Q_0/C = U_0$. (iii) Déterminer la constante d'intégration à l'aide des conditions initiales.

Correction

1 - ⋆ Pour $t < 0$:

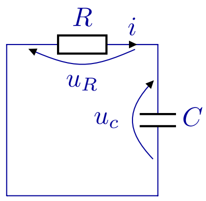
En régime stationnaire (grandeurs constantes) on peut remplacer le condensateur par un interrupteur ouvert.



Il y a un interrupteur ouvert, donc $\boxed{i = 0.}$

Et le condensateur est chargé à la tension U_0, donc $\boxed{u_c = U_0.}$

2 - Schéma pour $t > 0$, avec les composants en convention récepteur (flèches de tension et de courant en sens opposés) :



Loi des mailles : $u_R + u_c = 0$.

D'autre part on a $u_R = Ri$, dans lequel on remplace i par $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ (loi pour le condensateur), donc on a $u_R = RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$.

On injecte dans la loi des mailles ci-dessus : $RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c = 0$.

On divise par RC : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{RC} = 0.}$ On peut poser $\tau = RC$ pour avoir la forme habituelle.

3 - **(i)** Forme générale des solutions : $u_c = u_H + u_p$ mais ici $u_p = 0$ car il n'y a pas de second membre (0 à droite du signe égal).

Et on sait que $u_H = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Donc $\boxed{u_c = A\mathrm{e}^{-t/\tau}.}$

(ii) $u_c(t = 0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{condensateur donc u continue}}}{=} u_c(0^-) = U_0$.

(iii) Or d'après la solution, $u_c(0^+) = A\mathrm{e}^0 = A$, donc $A = U_0$.

Finalement : $\boxed{u_c = U_0\mathrm{e}^{-t/\tau}.}$

Exercice C2 – Réaliser un bilan énergétique

1 - On se place dans le cas du circuit de l'EC précédent. On a obtenu l'équation $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{\tau} = 0$, et sa solution $u_c(t) = U_0 \exp\{-t/\tau\}$ avec $\tau = RC$.

(i) Écrire un bilan de puissance pour ce circuit.

(ii) Faire un bilan d'énergie en montrant que la variation d'énergie stockée dans le condensateur entre $t = 0$ et $t = +\infty$ correspond bien à l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

Correction

(i) Bilan de puissance : loi des mailles $u_R + u_c = 0$, multipliée par i : $u_R i + u_c i = 0$. Or $u_R = Ri$.

On peut l'écrire aussi : $-u_c i = Ri^2$.

Ainsi : $-u_c i$ est la puissance cédée par le condensateur.

Cette puissance cédée est exactement reçue par la résistance et dissipée par effet Joule (terme Ri^2).

(ii) Bilan d'énergie :

– Énergie stockée par le condensateur à $t=0$: $\mathcal{E}_C(0) = \dfrac{1}{2}Cu_c(0)^2 = \dfrac{1}{2}CU_0^2$.

Et au bout d'un temps long : $\mathcal{E}_C(+\infty) = \dfrac{1}{2}Cu_c(+\infty)^2 = 0$.

Donc la variation d'énergie dans la condensateur est $\Delta\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_C(0) - \mathcal{E}_C(+\infty) = \dfrac{1}{2}CU_0^2$.

– Calculons l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance :

$$\mathcal{E}_{\text{diss Joule}} = \int_0^{+\infty} Ri^2 \mathrm{d}t$$

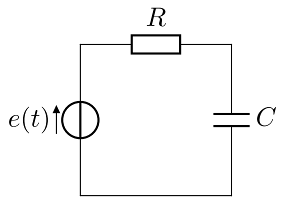
Il faut connaître i, on utilise $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{CU_0}{\tau}\exp\{-t/\tau\}$, donc :

$$\mathcal{E}_{\text{diss Joule}} = \int_0^{+\infty} R\frac{C^2U_0^2}{\tau^2}\exp\{-2t/\tau\}\mathrm{d}t = R\frac{C^2U_0^2}{\tau^2}\left[\frac{-\tau}{2}\exp\{-2t/\tau\}\right]_0^{+\infty} = R\frac{C^2U_0^2}{\tau^2}\frac{-\tau}{2}(0-1) = R\frac{C^2U_0^2}{2\tau} = \frac{CU_0^2}{2}.$$

On obtient bien $\Delta\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_{\text{diss Joule}}$.

Variantes de l'EC 1 : charge du condensateur

L'EC 1 concerne la décharge d'un condensateur dans un circuit RC. Il faut savoir mener les mêmes questions dans le cas de la charge du condensateur (cette charge a été traitée dans le cours partie II). Les questions sont alors les suivantes :



Pour $t < 0$ le générateur est éteint (tension nulle). À partir de $t = 0$ il délivre une tension E constante.

1 - Déterminer les expressions de la tension et du courant pour $t < 0$.

2 - Pour $t < 0$ le générateur est éteint (tension nulle). À $t = 0$ il délivre une tension E constante. Déterminer l'équation différentielle suivie par la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur.

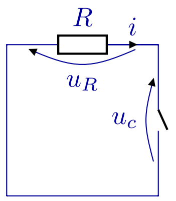
3 - L'équation du système est écrite sous la forme : $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$.

(i) Donner la forme générale des solutions de cette équation. (ii) Justifier que la condition initiale est $u_c(t = 0^+) = 0$. (iii) Déterminer la constante d'intégration à l'aide des conditions initiales.

Correction

1 - ⋆ Pour $t < 0$ (générateur éteint) :

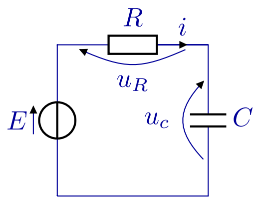
En régime stationnaire (grandeurs constantes) on peut remplacer le condensateur par un interrupteur ouvert.



Il y a un interrupteur ouvert, donc $\boxed{i = 0.}$ Donc $u_R = Ri = 0$.

Loi des mailles : $u_c + u_R = 0$ donc $\boxed{u_c = -u_R = 0.}$

2 - Schéma pour $t > 0$, avec les composants en convention récepteur (flèches de tension et de courant en sens opposés) :



Loi des mailles : $E - u_R + u_c = 0$ soit $u_R + u_c = E$.

D'autre part on a $u_R = Ri$, dans lequel on remplace i par $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ (loi pour le condensateur), donc on a $u_R = RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$.

On injecte dans la loi des mailles ci-dessus : $RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c = E$.

On divise par RC : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{RC} = \dfrac{E}{RC}.}$ On peut poser $\tau = RC$ pour avoir la forme habituelle.

3 - **(i)** Forme générale des solutions : $u_c = u_H + u_p$.
On sait que $u_H = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$.
Et $u_p = \text{cst}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t} = 0$ et l'équation donne $0 + \dfrac{u_p}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$ donc $u_p = E$.
Donc $\boxed{u_c = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E.}$

(ii) $u_c(t = 0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{condensateur donc u continue}}}{=} u_c(0^-) = 0$.

(iii) Or d'après la solution, $u_c(0^+) = A\mathrm{e}^0 + E = A + E$, donc $A = -E$.
Finalement : $\boxed{-E\mathrm{e}^{-t/\tau} + E = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}).}$

Variantes des EC 1 à 4 : avec une bobine

Les exercices de TD étudient la charge et la décharge d'une bobine, il faut également savoir les traiter. Ils peuvent être posés comme question de cours en colle.

Méthodes

Méthode 1 : Mettre en équation un circuit électrique

Comme d'habitude : schéma, flèches de tension et de courant.
Loi des mailles ou des nœuds ou diviseur de tension ou de courant, puis lois de comportement.

Méthode 2 : Résoudre une équation différentielle du 1er ordre (à coefficients constants)

Voir fiche dédiée.

Début du cours

Introduction sur la partie "systèmes linéaires"

- Un **système linéaire** est un système dont l'évolution est décrite par une ou plusieurs équations différentielles **linéaires**.
- On se restreint aux système linéaires **invariants**, pour lesquels les coefficients de l'équation différentielle sont constants.
- **L'ordre** du système est donné par l'ordre de l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la grandeur étudiée.

Exemples d'équations différentielles ($u(t)$ est la grandeur étudiée) :

$$a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b\,u(t) = 0 \qquad a\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + c\,u(t) = 0 \qquad a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b\,t^2\,u(t) = 0 \qquad a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b\sqrt{u(t)} = 0$$

$\rightsquigarrow_1$ Indiquer à chaque fois si l'équation différentielle est linéaire, invariante, et son ordre.

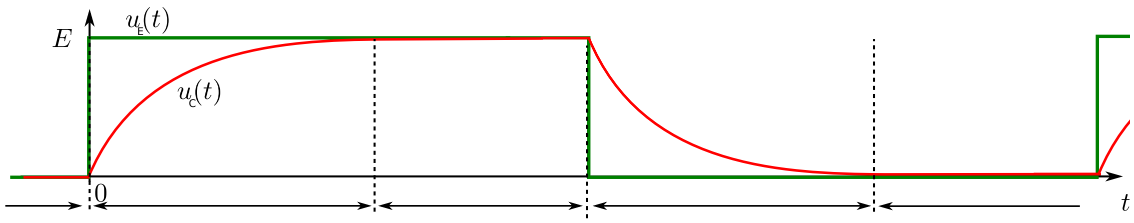
Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux systèmes linéaires invariants du premier ordre.

I - Qu'est-ce qu'un régime transitoire ?

1 - Expérience : charge et décharge d'un condensateur

⋆ **Expérience :** on étudie un circuit RC série alimenté par un GBF qui fournit une tension créneau entre $0\,\mathrm{V}$ et $E = 5\,\mathrm{V}$.

⋆ **Observations (oscilloscope) :**



⋆ **Modélisation :** source de tension idéale, condensateur idéal.

Schéma :

2 - Vocabulaire

Lorsque l'on met sous tension un appareil électrique, les courants et les tensions mettent un certains temps avant d'atteindre leurs valeurs de fonctionnement. De même lorsque l'on coupe l'alimentation d'un appareil, courants et tensions n'atteignent pas instantanément leurs valeurs de repos. Il y a donc un *régime transitoire* qui fait le lien entre deux *régimes permanents*. Ceci peut être lors du passage alimenté → non alimenté (ou l'inverse) pour un circuit électronique, et de façon plus générale lorsque l'on soumet le système à un échelon en entrée (par exemple une voiture qui descend un trottoir).

Le critère porte sur la sortie $s(t)$.

▶ **Régime permanent :** lorsque la sortie d'un système a atteint une valeur constante, ou lorsque qu'elle a atteint un régime périodique.

▶ **Régime transitoire :** lorsque la sortie d'un système évolue, pendant un certain temps, entre deux régimes permanents.

Le critère porte sur l'entrée $e(t)$.

▷ **Régime forcé :** lorsque l'entrée du système est maintenue à une valeur non nulle. Cette valeur peut être constante, peut être harmonique (on parle alors de régime sinusoïdal forcé, RSF), ou peut être une fonction périodique (un créneau par exemple).

▷ **Régime libre :** lorsque le système n'est alimenté par aucune source d'énergie. Donc lorsque l'entrée du système est nulle ou devient nulle : $e(t) = 0$.