Mécanique
Chapitre 6

Mouvement dans un champ de force centrale

I Conséquences générales pour une force centrale

$\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$

1 - Étude avec le moment cinétique

a/ Conservation du moment cinétique

$\vec{F} // \overrightarrow{OM} \Rightarrow \vec{\sigma}_0 = \vec{\text{cst}} \Rightarrow$

- mouvement plan
- loi des aires, $\boxed{r^2\dot{\theta} = C = \text{cst}}$ (coord. polaires dans plan du mvt)

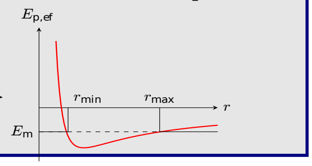
b/ et c/ Démonstrations

2 - Étude énergétique

a/ Énergie potentielle effective $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}$

b/ Type de mouvement

- $E_m \geq 0$: état de diffusion
- $E_m < 0$: état lié



II Application aux planètes et satellites

1 - Rappels sur la loi de Newton

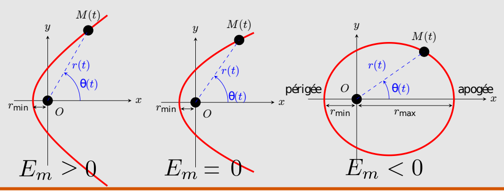
$\vec{F} = -G\dfrac{mm'}{r^2}\vec{e}_r \xrightarrow{F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}} E_p = -G\dfrac{mm'}{r}$

2 - Référentiels

- Terrestre, géocentrique, héliocentrique

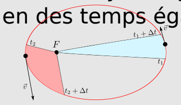
3 - Nature des trajectoires

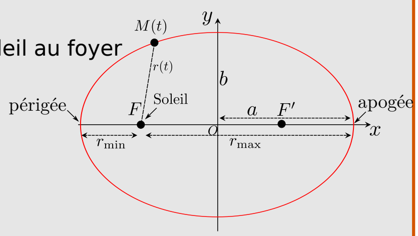
hyperbole — parabole — ellipse



4 - Lois de Kepler

1- orbite = ellipse avec Soleil au foyer
2- aires balayées égales en des temps égaux





3- T^2 proportionnel à a^3

5 - Étude d'un satellite en orbite circulaire

a/ Particularités de l'orbite circulaire

- v uniforme
- savoir exprimer la période
- et la vitesse
- et E_m

b/ Cas géostationnaire

- T=24h, circulaire, plan équatorial
- savoir calculer l'altitude

III Application aux charges

$F(r) = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \xrightarrow{F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}} E_p(r) = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Ce qu'il faut connaître

(cours : II)

▶1 Quelles sont les définitions des référentiels terrestre, géocentrique et héliocentrique ?

Décrire le mouvement de la Terre dans chacun.

▶2 Donner l'expression de la force gravitationnelle exercée par une masse m' située en O, sur une masse m située en M une distance $r = OM$.

Donner l'expression de l'énergie potentielle dont dérive cette force.

▶3 Énoncer les trois lois de Kepler.

Ce qu'il faut savoir faire

(cours : I)

▶4 Pour un point matériel soumis à une force centrale, démontrer la conservation du moment cinétique, en déduire des conséquences (mouvement plan, loi des aires). → **EC1**

▶5 Exprimer la conservation de l'énergie mécanique, construire une énergie potentielle effective. L'utiliser pour décrire qualitativement le mouvement radial (état lié ou état de diffusion).

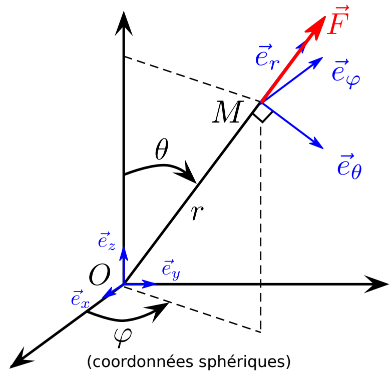
(cours : II)

▶6 Cas particulier d'un mouvement circulaire : montrer que le mouvement est uniforme, exprimer sa période et retrouver la 3e loi de Kepler. → **EC2**

▶7 Satellite géostationnaire : justifier le type d'orbite, calculer l'altitude du satellite. → **EC3**

Exercices de cours

Exercice C1 – Conservation du moment cinétique et conséquences



(coordonnées sphériques)

On considère un point M de masse m soumis à un champ de force centrale $\vec{F}$, de centre O.

1 - Montrer que le moment cinétique en O est conservé au cours du mouvement. On utilisera les coordonnées sphériques de centre O (cf schéma à droite).

2 - On note $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{\sigma}_O$.

Montrer qu'à tout instant, $\overrightarrow{OM}$ est perpendiculaire à $\vec{\sigma}_O$ et donc à $\vec{e}_z$. En déduire que le mouvement est dans le plan Oxy.

3 - On utilise les coordonnées polaires dans le plan Oxy (vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$).

Montrer que la conservation du moment cinétique implique que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est constante au cours du mouvement.

Comment interprète-t-on ceci géométriquement ?

1 - Coordonnées sphériques de centre O.

Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport au point fixe O :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge F\vec{e}_r = \vec{0}.$$

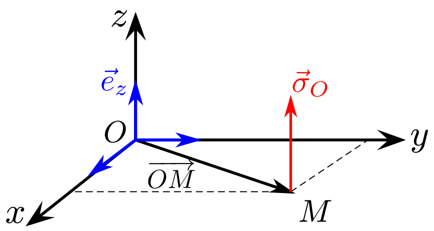
2 - Comme $\vec{\sigma}_O$ est constant, on peut prendre l'axe Oz orienté par $\vec{\sigma}_O$, avec $M \in Oxy$ initialement.

Or on sait que (propriété du produit vectoriel) $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$.

Donc $\forall\ t$, $\overrightarrow{OM} \perp \vec{\sigma}_O$.

Donc $\forall\ t$, $\overrightarrow{OM} \perp \vec{e}_z$ (car $\vec{\sigma}_O$ est selon $\vec{e}_z$).

$\rightarrow$ Si $\overrightarrow{OM}$ reste toujours perpendiculaire à $\vec{e}_z$, c'est que le mouvement du point M est toujours contenu dans le plan Oxy.



3 - Comme d'habitude : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$, et $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}(r\vec{u}_r)}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \underbrace{r\vec{u}_r}_{\overrightarrow{OM}} \wedge m\underbrace{(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}_{\vec{v}}\\ &= \underbrace{r\vec{u}_r \wedge \dot{r}\vec{u}_r}_{=\vec{0}} + r\vec{u}_r \wedge mr\dot{\theta}\vec{u}_\theta\\ &= mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z.\end{aligned}$$

Comme $\vec{\sigma}_O$ est constant, on en déduit que $\boxed{\forall\ t,\ r^2\dot{\theta} = \text{cst.}}$

Exercice C2 – Particularités de l'orbite circulaire

On considère un satellite en orbite autour de la Terre, dans le cas particulier où cette orbite est **circulaire** (rayon R).

On se place dans le référentiel géocentrique, muni d'un repère polaire dans le plan de l'orbite, de centre O (centre de la Terre). On note M le point repérant le satellite, et m sa masse.

On note $R_T = 6400\,\text{km}$ le rayon de la Terre et $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$ sa masse. On donne $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

1 - Montrer que le mouvement est circulaire uniforme, c'est-à-dire que la norme du vecteur vitesse (ou la vitesse angulaire) est constante. On pourra pour cela appliquer le PFD au satellite.

2 - Donner l'expression de la norme v de la vitesse sur l'orbite, puis de la période du mouvement, en fonction du rayon R, de la masse de la Terre M_T et de la constante G.

On remarque que ceci permet de retrouver la troisième loi de Kepler (mais cette 3ᵉ loi est plus générale car elle est aussi valable pour les mouvements elliptiques, dont le cercle n'est qu'un cas particulier).

3 - Orbite basse : dans cette question, le satellite est en orbite basse, donc à une altitude (mesurée par rapport à la surface de la Terre) $h \ll R_T$. Sa distance au centre de la Terre O est donc $R = R_T + h \simeq R_T$.

- **a -** Calculer sa période de révolution autour de la Terre.
- **b -** Calculer également sa vitesse.
  Cette vitesse, qui est celle nécessaire à la mise en orbite d'un objet à altitude nulle, est appelée première vitesse cosmique.

Ceci s'applique pour les satellites assez bas, comme par exemple l'ISS ($h = 400\,\text{km}$).

4 - Énergie mécanique : donner l'expression de l'énergie mécanique de la masse m en fonction de G, M_T, m et R, et montrer qu'elle est bien négative.

Correction.

1 - Référentiel géocentrique galiléen, PFD au satellite : $m\vec{a} = F\vec{e}_r$ avec $\vec{F} = -G\dfrac{mM_T}{R^2}\vec{e}_r$.

Coordonnées polaires : on sait que $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$.

Par dérivations successives, et car R est constant :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r, \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

Le PFD sur $\vec{e}_\theta$ indique donc que $mR\ddot{\theta} = 0$, donc $\ddot{\theta} = 0$, donc la vitesse angulaire $\boxed{\dot{\theta} = \text{cst.}}$

Ceci implique aussi que $\|\vec{v}\| = R|\dot{\theta}|$ est constante.

Remarque : On peut aussi utiliser la conservation du moment cinétique afin de démontrer la loi des aires, $R^2\dot{\theta} = C = \text{cst}$, ce qui prouve que $\dot{\theta}$ est constant. Cependant ceci ne nous aidera pas pour la question suivante, car nous ne connaissons pas C.

2 - Le PFD sur $\vec{e}_r$ indique : $-mR\dot{\theta}^2 = -G\dfrac{mM_T}{R^2}$.

On a $|\dot{\theta}| = \|\vec{v}\|/R$, donc ceci s'écrit aussi : $m\dfrac{\|\vec{v}\|^2}{R} = G\dfrac{mM_T}{R^2}$.

Donc $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R}}.}$

Lien avec la période : on a $\|\vec{v}\| = \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}} = \dfrac{2\pi R}{T}$, soit donc en remplaçant :

$$m\frac{4\pi^2R^2}{T^2R} = G\frac{mM_T}{R^2}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{GM_T}}.}$$

3 - **a -** $\boxed{T = 85\,\text{min.}}$

b - Pour la vitesse on peut reprendre $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R}} = 7{,}9\,\text{km/s.}}$

Remarque : Pour l'ISS, qui est à $400\,\text{km}$ d'altitude, $R = 6400 + 400 = 6800\,\text{km}$ et on a $T = 93\,\text{min}$ et $v = 7{,}7\,\text{km/s}$

4 - L'énergie mécanique s'écrit $E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GmM_T}{R} \underbrace{=}_{v=\sqrt{\frac{GM_T}{R}}} \dfrac{1}{2}m\dfrac{GM_T}{R} - \dfrac{GmM_T}{R}$, d'où

$$\boxed{E_m = -\frac{GmM_T}{2R} < 0.}$$

Il est normal qu'elle soit négative, puisque nous avons montré que c'est le cas pour les états liés (orbites bornées).

Exercice C3 – Satellite géostationnaire

On considère un satellite en orbite autour de la Terre, dans le cas particulier où cette orbite est **circulaire**, dont on note R le rayon.

On se place dans le référentiel géocentrique, muni d'un repère polaire dans le plan de l'orbite, de centre O (centre de la Terre). On note M le point repérant le satellite, et m sa masse.

On note $R_T = 6400\,\text{km}$ le rayon de la Terre et $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$ sa masse. On donne $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

On considère un satellite géostationnaire.

1 - Expliquer en quoi "géostationnaire" consiste, et quel type d'orbite cela implique (en terme de forme, de localisation et de période).

2 - Donner l'expression de la période du mouvement en fonction du rayon R, de la masse de la Terre M_T et de la constante G.

On pourra pour cela appliquer le PFD au satellite (identique questions 1 et 2 de l'EC précédent).

3 - En déduire la distance R, puis l'altitude h par rapport au sol.

Correction.

1 - On a montré dans le I du cours que la trajectoire est dans un plan qui passe par le centre O de la Terre.

On voit donc que pour un satellite géostationnaire, il est nécessaire que l'orbite soit dans le plan de l'équateur (pas comme sur le schéma ci-contre !), circulaire, et avec une période égale à celle de rotation de la Terre sur elle-même (donc $\simeq 24\,\text{h}$).

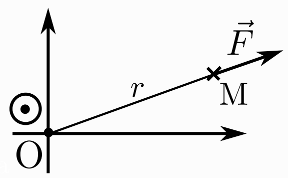
2 - Cf exercice précédent, questions 1 et 2.

3 - On a donc $T^2 = \dfrac{4\pi^2 R^3}{GM_T}$, ce qui donne $\boxed{R = \left(\dfrac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42\,300\,\text{km}.}$

L'altitude par rapport au sol est donc $\boxed{h = R - R_T = 35\,900\,\text{km}.}$

Définition : champ de force centrale

Un point matériel M évolue dans un champ de force centrale, de centre O, lorsqu'il est uniquement soumis à une force dont la direction est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ et dont la norme ne dépend que de $r = OM$.



Cette force s'exprime donc, dans un repère en coordonnées sphériques centré sur O, comme

$$\boxed{\vec{F} = F(r)\,\vec{e}_r.}$$

Une force centrale est toujours conservative : il existe une énergie potentielle $E_p(r)$ telle que

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}.$$

$\rightsquigarrow_1$ **Exemples :**

- Force de gravitation entre une masse m située en O, et une masse m' à une distance r, s'écrit : $\vec{F} = -G\dfrac{mm'}{r^2}\vec{e}_r$.
- Force électrostatique entre une charge q située en O, et une charge q' à une distance r, s'écrit : $\vec{F} = \dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r$.
- Ressort attaché en O exerce sur un point M à son autre extrémité (avec $OM = r$) une force : $\vec{F} = -k(r - l_0)\vec{e}_r$.

I – Conséquences générales pour une force centrale

1 – Étude avec le moment cinétique

a/ Conservation du moment cinétique

Propriétés

Soit un point M, de masse m et vitesse $\vec{v}$, soumis uniquement à une force centrale $\vec{F} = F(r)\,\vec{e}_r$.

$\Rightarrow$ Le moment cinétique en O est constant, $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{\text{cst}}$.

$\Rightarrow$ Le mouvement a lieu dans un plan (celui perpendiculaire à $\vec{\sigma}_O$ et contenant O).

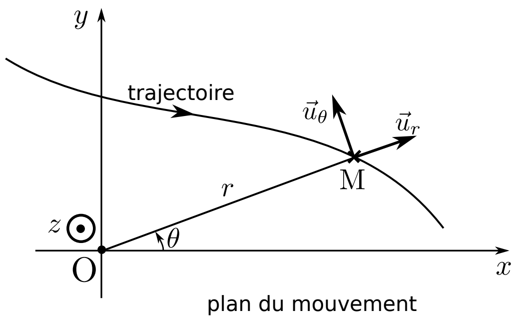
$\Rightarrow$ En coordonnées polaires dans le plan du mouvement, la grandeur $r^2\dot{\theta} = C$ est constante au cours du mouvement.

On appelle C la "constante des aires".

Ceci s'interprète géométriquement en disant que le vecteur position balaie des aires égales pendant des durées égales.

Remarque : le mouvement étant dans le plan Oxy, on utilisera dans toute la suite les coordonnées polaires dans ce plan (alors qu'avant on était en coordonnées sphériques).

On note $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ les vecteurs de cette base. On a $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{e}_z$.

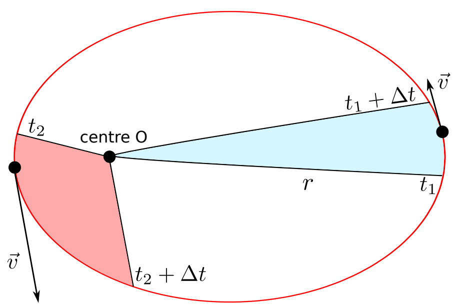


plan du mouvement

Interprétation de la loi des aires : $r^2\dot{\theta}$ doit rester constant au cours du mouvement, donc

- si r est petit alors il faut pour compenser une vitesse angulaire plus importante ($\dot{\theta}$ augmente).
- si r est grand alors la vitesse angulaire sera plus petite ($\dot{\theta}$ diminue).

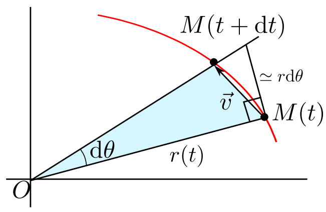
On montre (cf version corrigée du poly) que les aires balayées sur la figure ci-dessus sont égales (si elles sont parcourues pendant des durées égales).



Démonstration de la loi des aires :

$r^2\dot{\theta} = r \times r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = C$, donc pendant un temps dt l'angle θ évolue de dθ, et on a la relation

$$\frac{r \times r\mathrm{d}\theta}{2} = \frac{C\mathrm{d}t}{2}.$$



Or on voit que $r \times r\mathrm{d}\theta/2$ est l'aire balayée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (l'aire du triangle rectangle ci-contre vaut $r \times r\mathrm{d}\theta/2$, et l'aire non coloriée est d'ordre 2 en dt donc négligeable).

Comme $C =$ cst, cette aire balayée est toujours la même pendant un temps dt constant, où que l'on soit sur la trajectoire.

2 – Étude énergétique

a/ Introduction de l'énergie potentielle effective

Écrivons l'énergie mécanique d'une masse m évoluant dans un champ de force centrale.

- Coordonnées polaires dans le plan du mouvement.
- On note $E_p(r)$ l'énergie potentielle dont dérive la force.
- Vitesse $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, donc $\|\vec{v}\|^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$.
- On a la loi des aires, $r^2\dot{\theta} = C$, donc $r\dot{\theta} = C/r$.
- Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m = E_c + E_p(r) &= \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 + E_p(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r) \quad \text{(loi des aires)} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\mathrm{eff}}(r) \quad \text{où on définit } E_{p,\mathrm{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r). \end{aligned}$$

Énergie potentielle effective

Pour un mouvement dans un champ de force centrale, on peut écrire l'énergie mécanique de sorte à ce que tout se passe comme si on étudiait un mouvement à un degré de liberté selon un axe fixe de coordonnée r, avec :

- une énergie cinétique $\dfrac{1}{2}m\dot{r}^2$,
- une énergie potentielle $E_{p,\mathrm{eff}}(r) = \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} + E_p(r)$.

On parle d'énergie potentielle *effective*, pour dire que tout ce passe comme s'il s'agissait d'une énergie potentielle.

Il ne faut pas connaître les expressions par cœur, mais être capable de refaire ces manipulations.

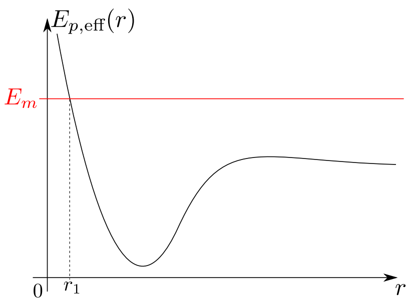
b/ Utilisation pour prédire le type de mouvement

On retrouve ce que nous avons vu au chapitre 3.2 sur l'énergie : l'énergie mécanique E_m est constante (force conservative), et

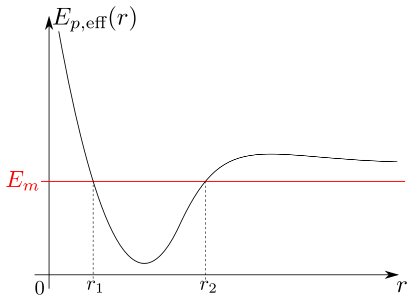
$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\geq 0} + E_{p,\mathrm{eff}}(r)$, donc $\boxed{E_{p,\mathrm{eff}}(r) \leq E_m}.$

Ceci donne le type de mouvement possible, en fonction de la valeur de E_m : cf schéma ci-contre avec une forme arbitraire pour $E_{p,\mathrm{eff}}(r)$.

Ceci sera mobilisé dans la partie suivante.



Zone accessible : $r \geq r_1$
$\Rightarrow$ mouvement ouvert (ou de diffusion).



Zone accessible : $r_1 \leq r \leq r_2$
$\Rightarrow$ mouvement borné.

II – Application aux planètes et satellites

Une force newtonnienne (ou champ de force newtonnien) est une force en $1/r^2$. Elle peut être attractive ou répulsive. Nous nous intéressons ici uniquement au cas gravitationnel, donc attractif.

1 – Rappels sur la loi de Newton

Loi de la gravitation universelle

Coordonnées sphériques, centre O.
Soit une masse m placée en O, et une masse m' placée en M, avec $OM = r$.
La masse en O exerce sur celle en M une force :

$$\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\vec{e}_r.$$

$G = 6{,}674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$ (constante de gravitation universelle).

Cette loi est valable pour des masses m et m' ponctuelles, et aussi si les masses m et m' sont à symétrie sphérique, centrée respectivement en O et en M.
Cette loi est donc valable en très bonne approximation pour des planètes et pour tout corps céleste en général, à condition que O et M soient le centre de la planète, de l'étoile, etc.

Application : lien avec la pesanteur à la surface d'une planète

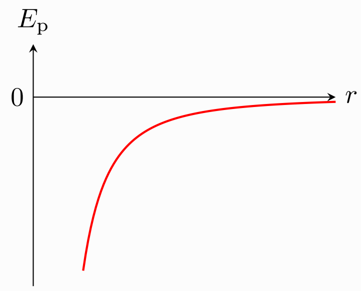
Soit une planète de masse M_P et rayon R_P. À sa surface, le poids d'un objet de masse m est $\vec{P} = m\vec{g}$, mais aussi $\vec{P} = -G\frac{mM_P}{R_P^2}\vec{e}_r$.

On en déduit $g = \frac{GM_P}{R_P^2}$. Sur Terre, avec $M_P = 6{,}0\times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ et $R_T = 6400\,\mathrm{km}$, on trouve bien $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Énergie potentielle gravitationnelle

L'énergie potentielle dont dérive la force $\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\vec{e}_r$ s'exerçant sur la masse m', est

$$E_p(r) = -G\frac{mm'}{r}.$$



Il faut connaître cette relation (ou la retrouver avec $F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$).

$\rightsquigarrow_2$ **Démonstration :**

Par définition de ce qu'est une énergie potentielle : $F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$.
C'est ce qui a été vu au chapitre 3, dont nous admettons ici la généralisation au cas sphérique avec dépendance en r seulement.

$$\text{On a donc}\quad \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = G\frac{mm'}{r^2} \quad \text{d'où} \quad E_p(r) = -G\frac{mm'}{r} + \text{cst}.$$

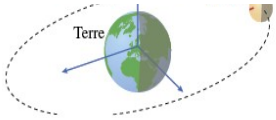
On choisit usuellement la constante nulle, afin d'avoir une énergie potentielle nulle à l'infini.

2 – Référentiels

Un référentiel terrestre est lié à la surface de la Terre.

Dans ce référentiel, la Terre est immobile.

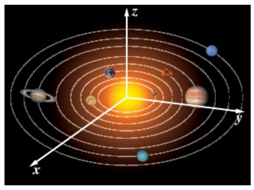
Adapté pour : mouvements des objets sur Terre.



Le référentiel géocentrique :
- son centre est le centre de la Terre,
- ses trois axes pointent vers des étoiles lointaines (fixes).

Dans ce référentiel, la Terre tourne sur elle-même, mais n'a pas de mouvement de translation.

Adapté pour : mouvement de la Lune ou des satellites.



Le référentiel héliocentrique :
- son centre est le centre du Soleil,
- ses trois axes pointent vers des étoiles lointaines (fixes).

Dans ce référentiel, les planètes décrivent des trajectoires quasi-circulaires.

Adapté pour : mouvements des planètes, des comètes.

Variante : référentiel de Copernic, idem mais centré sur le centre de masse du système solaire

3 – Nature des trajectoires

– L'énergie potentielle effective (cf I.2) est : $\boxed{E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m'\frac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2}m'\frac{C^2}{r^2} - G\frac{mm'}{r}.}$

L'allure de $E_{p,\text{eff}}(r)$ est montrée ci-dessous.

– $\Rightarrow$ Le type de mouvement va donc dépendre de la valeur de l'énergie mécanique (qui se conserve) de la masse m'.

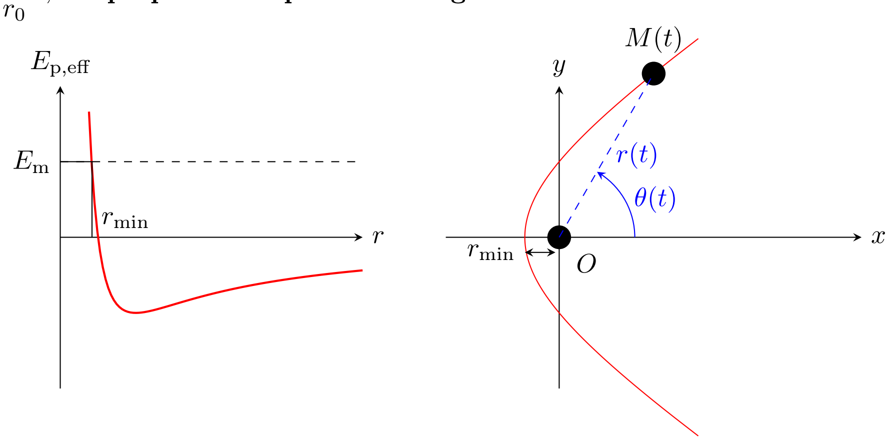
Initialement $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mm'}{r_0}$, **ce qui peut être positif ou négatif**.

Ainsi trois cas :

▶ $E_m > 0$:

r peut tendre vers l'infini, c'est un état non borné, **état de diffusion**.

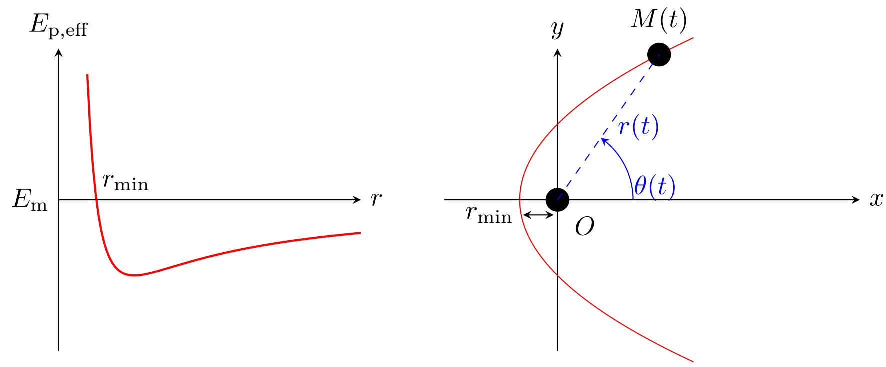
(On peut démontrer que les trajectoires sont des hyperboles.)



▶ $E_m = 0$:

r peut tendre vers l'infini, c'est un état non borné, **état de diffusion**.

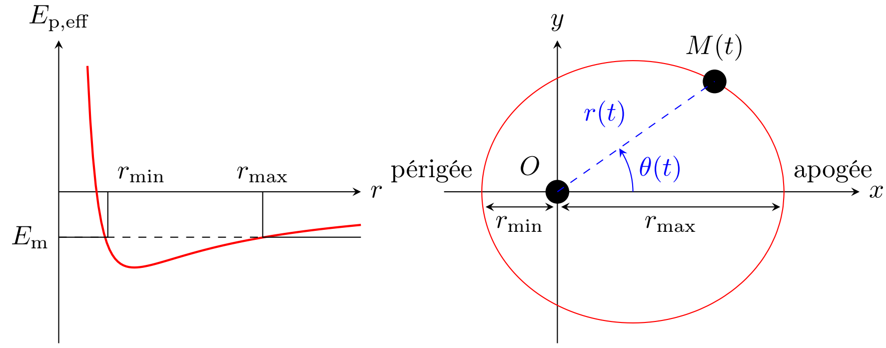
(On peut démontrer que les trajectoires sont des paraboles.)



▶ $E_m < 0$:

r est borné entre deux valeurs, c'est un **état lié**.

(On peut démontrer que les trajectoires sont des ellipses.)



Remarque : attention à ne pas confondre

- le graphe de $E_p(r) = -G\dfrac{mm'}{r}$ (tracé dans l'encadré sur E_p page précédente)
- avec le graphe de $E_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{1}{2}m'\dfrac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \dfrac{1}{2}m'\dfrac{C^2}{r^2} - G\dfrac{mm'}{r}$ (ceux tracés sur cette page).
  C'est sur celui-ci qu'on raisonne pour avoir la nature des trajectoires.

Dans la suite, nous nous intéressons uniquement aux cas des trajectoires bornées (état lié).

4 – Lois de Kepler

Les trois lois de Kepler

Ces lois sont valables dans le référentiel héliocentrique ou de Copernic.

- Loi 1 (loi des orbites) : les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers.
- Loi 2 (loi des aires) : les aires balayées par la ligne Soleil-planète pendant des intervalles de temps égaux sont égales.
- Loi 3 (loi des périodes) : le carré de la période de révolution autour du Soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe de son ellipse, soit :
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \text{cst},$$
  avec M_S la masse du Soleil. Ceci est indépendant de la masse de la planète.

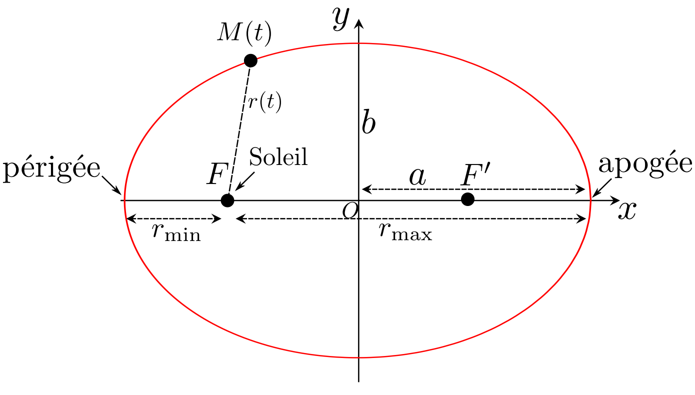
Ces lois se transposent au cas d'un satellite en orbite autour d'une planète : il faut alors se placer dans le référentiel lié au centre de la planète (géocentrique s'il s'agit de la Terre), et remplacer le Soleil par la planète. En particulier M_S devient la masse de la planète.

Il faut savoir énoncer ces trois lois (mais pas la relation exacte pour la 3$^\text{e}$).

Remarque : les lois de Kepler sont valables à condition de ne prendre en compte que la force de gravitation entre le corps et l'objet central. Il y a donc en réalité de faibles écarts, dû au fait que les planètes interagissent entre elles.

⋆ Illustration de la loi 1 (et propriétés des ellipses) :

Quelques notions sur les ellipses (pas à connaître) :



- Une ellipse possède un grand axe (longueur $2a$) et un petit axe (longueur $2b$), cf ci-contre.
- Dans le repère ci-contre, l'équation cartésienne de l'ellipse est
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
  Si $a = b$, on retrouve un cercle de rayon $R = a = b$, et son équation est bien $x^2 + y^2 = R^2$.
- Toujours dans ce même repère, la trajectoire est donnée par
$$x(t) = a\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad y(t) = b\sin(\omega t).$$
- L'excentricité est $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, et on a $0 \leq e \leq 1$.
  Plus l'ellipse est proche du cercle, plus $e \to 0$ (et si $e = 0$ alors $a = b$, on a un cercle).
  Plus l'ellipse est aplatie, plus $e \to 1$ (et si $e = 1$ alors $b = 0$, on a un segment).
- Une ellipse possède deux foyers, F et F' ci-contre.
  Si $a = b$, alors F et F' sont confondus en O.
- Le point où la planète est au plus proche du Soleil est le périgée (péri = proche), le point le plus éloigné est l'apogée.
  On a $r_{\text{max}} + r_{\text{min}} = 2a$ (évident). Et $r_{\text{max}} - r_{\text{min}} = 2ae$ (pas évident).

Aucune des formules ci-dessus n'est à connaître ! Retenez simplement le vocabulaire, et soyez capable de refaire un schéma d'ellipse.

Dans le système solaire (les chiffres ne sont pas à retenir) :

- Les trajectoires des planètes ont des excentricités faibles : $e = 0{,}21$ pour Mercure, 0,0086 pour Vénus, 0,017 pour la Terre, 0,093 pour Mars, etc.

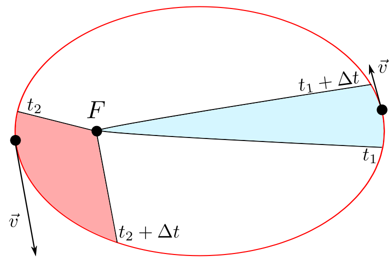
  Animation permettant de visualiser les trajectoires : https://javalab.org/en/keplers_law_en/
- En revanche les comètes ont des excentricités proches de 1 (comète de Halley : $e = 0{,}97$).
- Les satellites artificiels (de télécommunication, etc.) peuvent avoir des orbites quasi-circulaire ($e \simeq 0$) ou au contraire très elliptiques, selon les besoins.

Enfin, il est possible de démontrer cette loi 1 via un PFD sur un corps soumis à une force en $1/r^2\vec{e}_r$, mais c'est un peu mathématique et nous ne le faisons pas.

⋆ Illustration de la loi 2 :

- En un temps Δt donné (par exemple 1 h), l'aire balayée par le segment Soleil-planète est toujours la même.

  Ci-contre, l'aire en rouge et l'aire en bleu sont les mêmes.
- Conséquence : pour une orbite donnée, une planète va plus vite lorsqu'elle est proche du Soleil (à la fois en vitesse angulaire et en vitesse absolue), et plus doucement lorsqu'elle en est loin.
- Nous avons démontré cette loi dans le I.1.c, via la conservation de $r^2\dot{\theta}$.



⋆ Illustration de la loi 3 :

- Plus un objet est éloigné du corps central, plus sa période de révolution est longue.

  Période de révolution la Terre autour du Soleil : un an ; de Neptune : 164,8 ans (Neptune a fait à peine plus d'un tour depuis sa découverte en 1846 !).

  Période de révolution autour de la Terre de la station spatiale internationale (ISS, 400 km d'altitude) : 1h32 ; d'un satellite géostationnaire (36 000 km d'altitude) : 24 h ; de la Lune (384 400 km de distance) : 27 jours.
- On peut démontrer cette loi (encore à partir du PFD sur un corps soumis à une force en $1/r^2\vec{e}_r$), mais c'est assez mathématique. Nous le ferons dans la suite dans le cas plus simple où l'orbite est circulaire.

5 – Étude d'un satellite en orbite circulaire

a/ Particularités de l'orbite circulaire

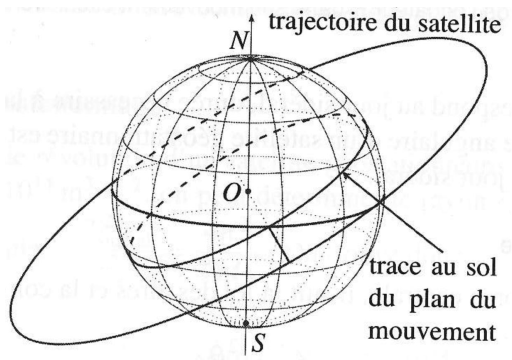
$\rightsquigarrow_3$ Faire l'**EC2**.

Remarque : tout ceci est valable dans le référentiel géocentrique.
Les orbites basses sont très utilisées, leurs avantages étant une communication rapide (satellites de télécommunication) et une bonne résolution pour les instruments d'observation (météorologiques ou autres). Cependant les orbites d'altitudes inférieures à 200 km environ sont inutilisables (frottements avec l'atmosphère). Il y a aussi des satellites sur des orbites non circulaires, assez fortement elliptiques.

b/ Cas d'un satellite géostationnaire

Certains satellites de communication doivent toujours être positionné au même endroit du ciel à partir d'un point terrestre (par exemple certaines antennes paraboliques pointent toujours dans la même direction). Ces satellites sont dits **géostationnaires** (ils “stationnent” par rapport à la Terre - “géo”) .

$\rightsquigarrow_4$ Faire l'**EC3** (pour la question 2 reprendre les résultats de l'EC précédent).

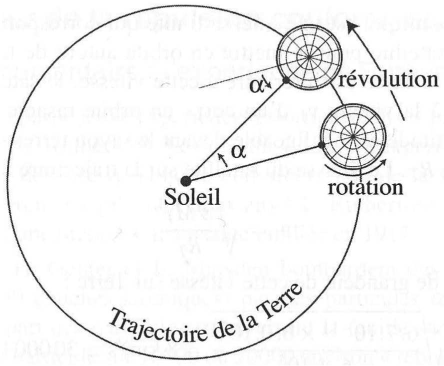


Bilan : l'altitude d'un satellite géostationnaire est d'environ 36 000 km.

Ce type d'orbite est très prisé (on y trouve plus de 300 satellites), et très surveillé.

Remarque : (hors programme, pas dans le poly élève) Dans le référentiel géocentrique (ou héliocentrique), la Terre ne tourne pas sur elle-même en 24 h. Il lui faut 23 h et 56 min pour effectuer un tour complet sur elle-même.

Pour être plus précis, 24 h est le temps mis pour que le Soleil revienne à la même position dans le ciel (on parle de jour solaire). Mais entre-temps la Terre a un peu avancé sur son orbite, et il faut donc – pour quelle soit à nouveau face au Soleil – qu'elle fasse un peu plus d'un tour sur elle-même : on voit sur le schéma ci-contre qu'elle a tourné de $2\pi + \alpha$.



Ainsi, un tour de 2π (ce qui correspond à un retour à la même position des étoiles lointaines) correspond à un peu moins de 24 h. On parle de jour sidéral. Un jour sidéral dure $24\,\text{h} \times \dfrac{2\pi}{2\pi + \alpha}$ avec $365{,}25\alpha = 2\pi$, donc on obtient bien 23 h et 56 minutes.

III – Application aux charges

Force entre deux charges et énergie potentielle

On se place dans un repère de coordonnées sphériques, de centre O.
Soit une charge q placée en O, et une charge q' placée en M, avec $OM = r$.

- **Force :** la loi de Coulomb indique que la charge en O exerce sur celle en M une force : $\boxed{\vec{F} = \dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r.}$

  $\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$ est la permittivité du vide.

- **Énergie potentielle :** elle s'obtient à partir de $F(r) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$. On a : $\boxed{E_p = \dfrac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\, r}.}$

Cette force est une force newtonnienne (en $1/r^2$), et on retrouve des résultats très similaires au cas gravitationnel.