Mécanique
Chapitre 4

Correction – TD – Mouvement des particules chargées

IV Démonstration de la nature circulaire du mouvement dans un champ $\vec{B}$ [• • ○]

1 - $\vec{F} = q(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) \wedge (B\vec{e}_z) = qB(-\dot{x}\vec{e}_y + \dot{y}\vec{e}_x)$.

Donc le PFD donne :

$$m\ddot{x} = qB\dot{y} \quad \text{et} \quad m\ddot{y} = -qB\dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = 0.$$

D'où :

$$\boxed{\ddot{x} = \omega_c\dot{y} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = -\omega_c\dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = 0.}$$

2 - On a $\ddot{z} = 0$, donc $\dot{z} = \text{cst} = 0$ car $\dot{z}(t=0) = 0$ (vitesse initiale nulle selon $\vec{e}_z$).

On a donc en intégrant encore une fois : $\boxed{z(t) = \text{cst} = 0}$ car $z(t=0) = 0$.

3 - $\star$ $\ddot{x} = \omega_c\dot{y}$ s'intègre en $\dot{x} = \omega_c\, y + A$ avec A une constante.

On évalue A en prenant $t = 0$: $0 = 0 + A$, donc $A = 0$ et on a $\boxed{\dot{x} = \omega_c\, y.}$

$\star$ $\ddot{y} = -\omega_c\dot{x}$ s'intègre en $\dot{y} = -\omega_c\, x + C$.

On évalue C en prenant $t = 0$: $v_0 = -\omega_c(-R) + C$, donc $C = v_0 - \omega_c R = v_0 - v_0 = 0$ et on a $\boxed{\dot{y} = -\omega_c\, x.}$

4 - $\ddot{x} \underset{\text{q1}}{\overset{}{=}} \omega_c\dot{y} \underset{\text{q3}}{=} \omega_c(-\omega_c\, x)$.

$$\text{D'où} \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0.}$$

Et de même, $\ddot{y} \underset{\text{q1}}{=} -\omega_c\dot{x} \underset{\text{q3}}{=} -\omega_c^2\, y$, soit donc

$$\boxed{\ddot{y} + \omega_c^2 y = 0.}$$

5 - $\star$ $x(t) = A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t$.

Or $x(0) = -R$ donc $A = -R$. Et $\dot{x}(0) = 0$ donc $B = 0$.

Finalement : $\boxed{x(t) = -R\cos\omega_c t.}$

$\star$ $y(t) = C\cos\omega_c t + D\sin\omega_c t$.

Or $y(0) = 0$ donc $C = 0$, et $\dot{y}(0) = v_0$ donc $D\omega_c = v_0$ donc $D = v_0/\omega_c = R$.

Finalement : $\boxed{y(t) = R\sin\omega_c t.}$

6 - D'après ce qui précède, $x = -R\cos\omega_c t$ et $y = R\sin\omega_c t$. On a donc bien $\boxed{x^2 + y^2 = R^2.}$ C'est l'équation cartésienne d'un cercle de rayon R et de centre O.

Remarque : une démonstration plus courte consiste à utiliser la base de Frenet (cf chapitre 2), dans laquelle le vecteur accélération s'écrit : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \dfrac{v^2}{R(t)}\vec{N}$, où v est la norme du vecteur vitesse. Comme cette norme est constante (car on a montré que la partie magnétique de la force de Lorentz est de puissance nulle), l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{v_0^2}{R(t)}\vec{N}.$$

Ci-dessus $R(t)$ est le rayon de courbure instantané de la trajectoire.
D'autre part, la norme de la force de Lorentz est $\|\vec{F}\| = |qvB|$ car $\vec{v} \perp \vec{B}$ à tout instant (le mouvement a lieu dans le plan xOy).
Avec le PFD : $m\|\vec{a}\| = \|\vec{F}\| \quad \Rightarrow \quad \dfrac{mv_0^2}{R(t)} = |qv_0B|$, d'où le fait que $R(t) = \text{cst}$ et que la trajectoire est circulaire.

V Cyclotron

1 - Cf démonstration du cours pour prouver que le rayon est $\boxed{R = \dfrac{mv}{eB}.}$

2 - Temps pour un demi-tour : $T = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{\pi mv/eB}{v}$ soit

$$\boxed{T = \frac{\pi m}{eB}.}$$

Ceci ne dépend pas de v.

3 - Le proton passe tout les $T = \dfrac{\pi m}{eB}$, mais tantôt en venant de la droite et tantôt de la gauche. Si on veut l'accélérer à chaque fois, il faut que le champ électrique soit à chaque fois dans le même sens que sa vitesse, donc il faut inverser le sens du champ électrique à chaque passage, avec une fréquence

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{eB}{\pi m}.}$$

4 - Notons E_{mA} l'énergie mécanique du proton juste avant qu'il n'entre dans la zone centrale où il est accéléré, et E_{mB} celle lorsqu'il ressort.

On a $E_{mA} = E_{cA} + eV_A$ et $E_{mB} = E_{cB} + eV_B$, avec $V_A - V_B = U_m$ la différence de potentiel appliquée.

Or $E_{mA} = E_{mB}$, d'où $E_{cB} + eV_B = E_{cA} + eV_A$, d'où une augmentation

$$\boxed{\Delta E_c = E_{cB} - E_{cA} = e(V_A - V_B) = eU_m.}$$

5 - Notons $v_f = 15 \cdot 10^3\,\text{km/s}$. L'objectif est que le proton atteingne une énergie cinétique finale $E_{cf} = \dfrac{1}{2}mv_f^2$.

Il faut donc un nombre d'accélérations qui est $N = \dfrac{E_{cf}}{\Delta E_c} = \dfrac{E_{cf}}{eU_m} = 469{,}1$, donc disons $\boxed{N = 470}$ demi-tours.

6 - $\boxed{R_f = \dfrac{mv_f}{eB} = 1{,}6\,\text{m}.}$

VI Spectromètre de masse

1 - On raisonne sur l'énergie mécanique, qui est conservée car le mouvement est conservatif (seule force prise en compte : la force électrique $q\vec{E}$).

– Au point S : $E_{m,S} = \frac{1}{2}mv_S^2 + qV_S = 0 + qV_S$.

– Au point O : $E_{m,O} = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_O$.

En égalisant les deux on obtient : $\frac{1}{2}mv_0^2 = qV_S - qV_O$. Or $U = V_S - V_O$, donc

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qU \quad \text{et} \quad \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.}$$

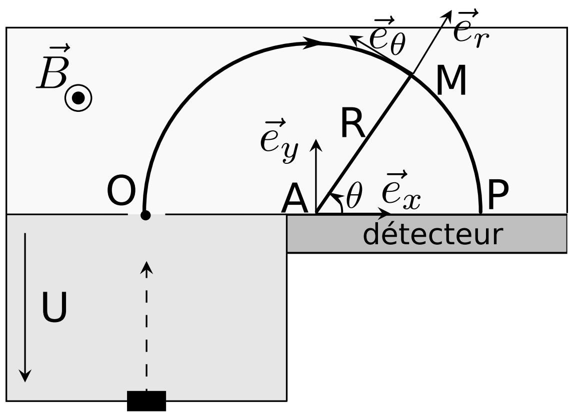
2 - En présence d'un seul champ magnétique, la force qui s'exerce sur la charge est $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

La puissance de cette force est $\boxed{\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0}$ car $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$.

Ainsi d'après le théorème de l'énergie cinétique, E_c reste constante, <u>donc v aussi</u>.

3 - La trajectoire est un cercle comme sur la figure ci-dessous. Il faut choisir un repère polaire.

$\overrightarrow{AM} = R\vec{e}_r$, $\quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, $\quad \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.



On a aussi $\vec{v} = v\vec{e}_\theta$ avec v la composante de la vitesse (pas sa norme), donc $v = R\dot{\theta}$, donc $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$ et on peut remplacer dans l'accélération :

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

On sait aussi que $\ddot{\theta} = 0$ car $v = R\dot{\theta}$ est constant.
Calculons ensuite la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qv\vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_z = qvB\vec{e}_r.$$

On applique le principe fondamental de la dynamique à la charge (référentiel galiléen) :

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{donc} \quad -\frac{mv^2}{R}\vec{e}_r = qvB\vec{e}_r.$$

On en déduit que $-\frac{mv}{R} = qB$, donc $\boxed{R = \frac{-mv}{qB}.}$

(Il y a un moins, mais d'après notre schéma $v < 0$ et donc $-v = \|\vec{v}\| > 0$. On peut ne pas s'embêter avec ceci et prendre des valeurs absolues.)

Enfin d'après la question 1 on a l'expression de $\|\vec{v}\|$:

$$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{R = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}}.}$$

4 - On trouve $OP = 2R = 14.4\,\text{cm}$ pour l'hydrogène, et $20.4\,\text{cm}$ pour le deuterium, dont la différence est largement mesurable !