Partie VI : Mécanique
Chapitre 3

Énergie en mécanique

I Énergie cinétique, puissance et travail d'une force

1 - Énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

2 - Puissance d'une force $\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

Force motrice, résistante.

3 - Travail d'une force

a/ élémentaire : $\delta W = \mathcal{P}\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$

b/ entre A et B : $W_{AB} = \int_A^B \delta W$

reliés par le TEC

II Théorème de l'énergie cinétique

a/ Instantané (th. de la puissance cinétique) $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}$

b/ Forme intégrale (th. de l'énergie cinétique) $E_{c,B} - E_{c,A} = \sum W_{AB}$

III Force conservative et énergie potentielle

1 - Définitions

W_{AB} independant chemin

ou il existe E_p telle que $\delta W = -\mathrm{d}E_p$

2 - Exemples d'énergies potentielles

a/ Pesanteur $E_p = mgz$ (axe z vers le haut)

b/ Élastique $E_p = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$

3 - Retour à la force

cas 1D (axe x) :

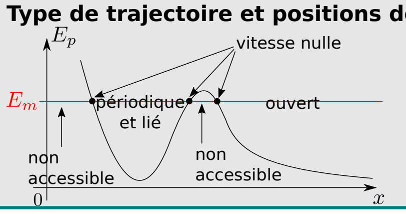
$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x$$

IV Théorème de l'énergie mécanique

$E_m = E_c + E_p$ $\qquad$ $E_{m,B} - E_{m,A} = \sum W_{AB,\mathrm{nc}}$

V Mouvement conservatif à un degré de liberté

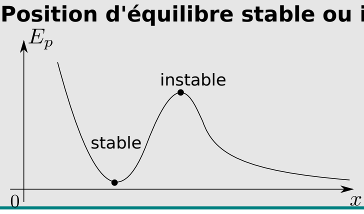
1 - Type de trajectoire et positions de vitesse nulle



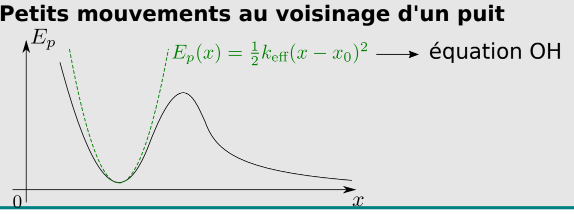
2 - Franchissement d'une barrière de potentiel

Quelle énergie fournir ?

3 - Position d'équilibre stable ou instable



4 - Petits mouvements au voisinage d'un puit



Ce qu'il faut connaître

——— (cours : I)

▶1 Quelle est la définition de l'énergie cinétique d'une masse m de vitesse $\vec{v}$?

▶2 Quelle est la définition de la puissance d'une force ?

▶3 Quelle est la définition du travail élémentaire d'une force ? (définition en fonction de la puissance, et définition en fonction du déplacement élémentaire)

▶4 Quelle est la définition du travail d'une force entre deux points A et B ?

——— (cours : II)

▶5 Comment s'énonce le théorème de l'énergie cinétique ? (donner la forme intégrale et la forme instantanée)

——————— (cours : III)

►6 Quelles sont les deux définitions d'une force conservative ?

Donner un exemple de force conservative, et un exemple de force non conservative.

►7 Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

Et celle de l'énergie potentielle élastique (force exercée par un ressort) ?

Il faut savoir redémontrer ces deux expressions.

——————— (cours : IV)

►8 Comment s'énonce le théorème de l'énergie mécanique ?

Dans quels cas l'énergie mécanique d'un point matériel est-elle conservée au cours du mouvement ?

Ce qu'il faut savoir faire

——————— (cours : I)

►9 Identifier si une force est motrice, résistante ou si elle ne travaille pas.

►10 Calculer le travail d'une force sur un déplacement. → **EC1**, **EC1bis**

——————— (cours : II)

►11 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique ou de la puissance cinétique sous la forme appropriée. → **EC2**, TD I

——————— (cours : III)

►12 Distinguer force conservative et force non conservative.

——————— (cours : IV)

►13 Utiliser le théorème de l'énergie mécanique. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales pour exprimer E_m. → **EC3**, **EC4**, TD I, II, IV, V

——————— (cours : V)

►14 Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif (bornée ou non, points où $\vec{v} = \vec{0}$). → **EC5**,cours V.1

►15 Évaluer l'énergie minimale pour franchir une barrière de potentiel. → **EC5**

►16 Faire le lien entre profil de E_p et allure du portrait de phase. → cours V.1.b

►17 Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre, stables ou instables. → cours V.3, TD III

►18 Étudier les petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre via une approximation harmonique. → TD VI

Exercices de cours

Exercice C1 – Calcul de travail et de puissance : ascension d'un cycliste

Un cycliste de masse $m = 80\,\mathrm{kg}$ (vélo et équipement inclus) effectue l'ascension du Ballon d'Alsace, soit un dénivelé de $700\,\mathrm{m}$.

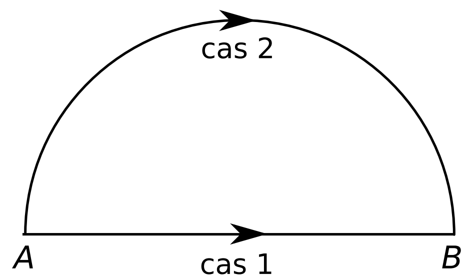
1 - Calculer le travail W du poids lors de cette ascension.

2 - Le cycliste roule en ligne droite à $15\,\mathrm{km/h}$ sur une pente de 10% (donc avec un angle par rapport à l'horizontale de $\alpha = \arctan(10/100)$). Que vaut la puissance du poids ?

Exercice C1bis – Calcul de travail : frottements de l'air

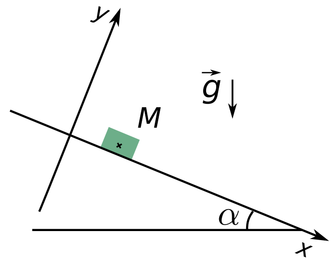
Une voiture va d'un point A à un point B distants de $d = 10\,\mathrm{km}$, en roulant avec une vitesse constante. On modélise les frottements dus à l'air par une force $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ (avec λ qui dépend de v, constant ici).

1 - Pour chacune des trajectoires ci-contre, donner l'expression du travail de la force de frottement lors de ce déplacement.



Exercice C2 – Application du théorème de l'énergie cinétique : glissade sans frottement

On considère un objet qui glisse sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On le modélise par un point matériel M de masse m glissant sans frottements. L'objet est lâché sans vitesse initiale, et on choisi le repère tel qu'à tout instant, $\vec{v} = v\vec{e}_x$ (cf schéma). Le référentiel du plan est supposé galiléen.



1 - Faire un bilan des forces et donner l'expression de la puissance de chacune des forces, notamment en fonction de m, g, v et α.

2 - En déduire une équation différentielle suivie par la composante v de la vitesse.

Exercice C3 – Application du TEM sur le cas de la chute libre

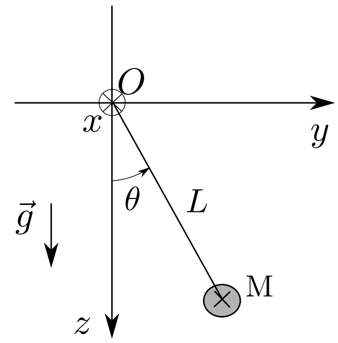
On considère une masse m en chute libre sans vitesse initiale dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme. On néglige tout frottement et le référentiel d'étude est galiléen. On utilise un axe z orienté vers le bas, avec $z = 0$ initialement.

1 - Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur de la masse en fonction notamment de z.

2 - En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, en déduire la vitesse de la masse après une chute d'une hauteur h.

Exercice C4 – Application du TEM sur le cas du pendule simple

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable, on note L sa longueur. On néglige tout frottement. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec z axe vers le bas et $g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$ constante.



1 - Donner l'expression de l'énergie cinétique de la masse m en fonction des coordonnées polaires du point M.

2 - Faire de même pour l'énergie potentielle de pesanteur du point M.

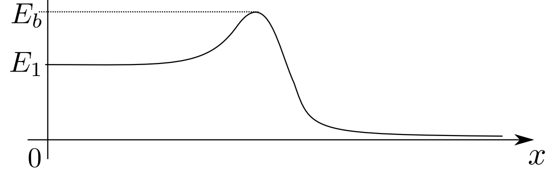
3 - Que peut-on dire du travail de la force de tension du fil ?

4 - En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, trouver une intégrale première du mouvement, c'est-à-dire une quantité comprenant $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ qui reste constante tout au long du mouvement.

5 - En déduire l'équation du mouvement, qui porte sur $\ddot{\theta}$ et θ.

Exercice C5 – Franchissement d'une barrière de potentiel

On considère l'énergie potentielle ci-contre, qui peut correspondre à une bille glissant sans frottements sur un sol dont la topographie est celle du graphique : altitude h_1 en $x = 0$, franchissement d'un col d'altitude h_b, puis altitude nulle lorsque $x \to +\infty$. La bille est lancée en $x = 0$ avec une vitesse v_0 en direction des x croissants.



1 - Justifier que l'énergie mécanique de la bille reste constante au cours du temps.

2 - Montrer que la bille atteint tout juste le haut du col pour une valeur particulière de sa vitesse initiale v_0, que l'on exprimera en fonction de m, E_1 et E_b.

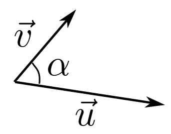
3 - Que se passe-t-il si v_0 est inférieure à cette valeur limite ? Et supérieure ?

4 - Exprimer enfin v_0 en fonction de m, g, h_1 et h_b.

Notions mathématiques

- Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

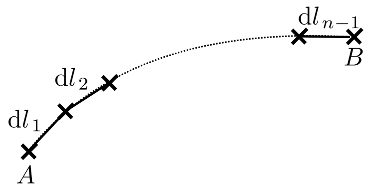
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \cos\alpha.$$



- Intégrale d'une longueur élémentaire dl le long d'une courbe AB :

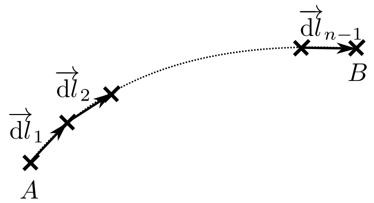
$$\int_A^B \mathrm{d}l = L_{AB}$$

où L_{AB} est la longueur de la courbe de A à B.



- Intégrale du déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ le long d'une courbe AB :

$$\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{AB}$$



Cours

I – Énergie cinétique, puissance et travail d'une force

1 – Énergie cinétique

Définition : énergie cinétique

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse v (en norme).
Son énergie cinétique est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2.$$

Unité SI : Joule

Remarque : La vitesse dépend du référentiel d'étude, donc l'énergie cinétique également.

2 – Puissance d'une force

Une force qui agit sur le point M peut, selon les cas, faire augmenter la vitesse de M, la faire diminuer, ou la laisser constante (mais en changer la direction). L'outil qui permet de quantifier ceci est la *puissance* de la force.

Définition : puissance d'une force

Soit un point matériel M de vitesse $\vec{v}$, soumis à une force $\vec{F}$.
La puissance de la force $\vec{F}$ est le produit scalaire des vecteurs force et vitesse :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Unité SI : Watt

Remarque : La vitesse dépend du référentiel d'étude, donc la puissance également.

Propriétés

- Si $\mathcal{P} > 0$, on dit que la force est **motrice** : elle a tendance à augmenter la norme de la vitesse.
- Si $\mathcal{P} < 0$, on dit que la force est **résistante** : elle a tendance à diminuer la norme de la vitesse.
- Si $\mathcal{P} = 0$, la force ne modifie pas la norme de la vitesse, mais éventuellement sa direction.

Ceci sera démontré par le théorème de la puissance cinétique, partie suivante. schémas

Exemples :
$\rightsquigarrow_1$ Indiquer dans chacun des cas ci-dessous le caractère moteur ou résistant de la force.

- Une bille en acier chute dans du glycérol (cf TP 11).
  Le liquide exerce une force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.
  Schéma. $\vec{f}\cdot\vec{v} = -\lambda v^2 < 0$ donc la force est résistante.

- La bille précédente est également soumise au poids $\vec{P} = m\vec{g}$.
  Schéma. $\vec{P}\cdot\vec{v} = mgv > 0$ donc la force est motrice.

- La Terre exerce sur la Lune une force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}$ dirigée vers le centre de la Terre. La trajectoire lunaire est en première approximation circulaire.
  Schéma. $\vec{F}\cdot\vec{v} = 0$ donc la force modifie uniquement la direction de $\vec{v}$.

3 – Travail d'une force

a/ Travail élémentaire d'une force

Travail élémentaire d'une force (définition 1)

Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ agissant pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ est la puissance exercée par cette force pendant cette durée :

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F})\,\mathrm{d}t$$

Unité SI : Joule

- $\delta W > 0$ pour une force motrice, $\delta W < 0$ pour une force résistance.
  Si $\delta W = 0$, on dit que la force ne travaille pas.

Remarque importante sur les notations :
On utilise deux notations pour les infiniments petits : d et δ.

- Avec d : la notation $\mathrm{d}f$ indique une différence de la fonction f évaluée entre deux instants très proches ou deux points très proches.
  Exemples :
  - $\mathrm{d}f = f(M') - f(M)$ avec M et M' très proches, ou encore $\mathrm{d}g = g(t') - g(t)$ avec t et t' deux instants très proches.
  - $\mathrm{d}t$ est un temps élémentaire, ou infinitésimal, c'est-à-dire très court.
    C'est la différence entre deux instants très proches : $\mathrm{d}t = (t + \mathrm{d}t) - t$.
  - Nous avons déjà vu le déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$.
    C'est bien la différence du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ entre deux instants très proches : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{OM}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t)$.
- La notation δ est utilisée pour les cas où la quantité infinitésimale ne peut pas être vue comme la différence d'une fonction entre deux instants ou deux points.
  Exemples :
  - δW ne peut pas être vu comme la différence d'une fonction évaluée à deux instants très proches ou entre deux points très proches.
    En effet, noter $\mathrm{d}W$ signifierait que $\mathrm{d}W = W(M') - W(M)$ avec M et M' très proches, ce qui n'a <u>aucun sens</u>, puisque le travail n'est pas défini en un point donné, mais pour un déplacement.

Seconde expression du travail élémentaire :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t$$

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

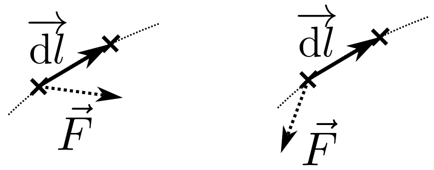
Travail élémentaire d'une force (définition 2)

Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ agissant pendant un déplacement $\mathrm{d}\vec{l}$ est le produit scalaire de la force et du déplacement élémentaire :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

(Il faut retenir les deux définitions, équivalentes, du travail élémentaire.)

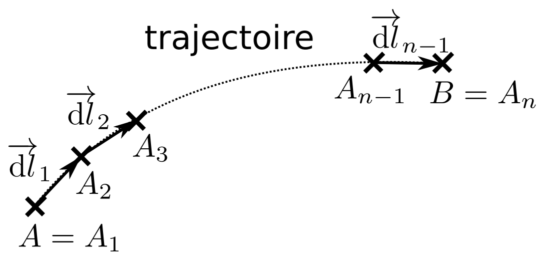
$\rightsquigarrow_2$ Indiquer dans chacun des cas ci-dessous le caractère moteur ou résistant de la force.



b/ Travail d'une force le long d'un déplacement

Lorsque le point M effectue un déplacement fini (par opposition à élémentaire) entre deux points A et B, alors le travail total de la force $\vec{F}$ est obtenu en sommant tous les travaux élémentaires le long du déplacement.

Pour cela, on décompose la trajectoire AB en une succession de n déplacements élémentaires $\mathrm{d}\vec{l}_i = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, et on somme :



$$W_{AB}(\vec{F}) = \sum_i \delta W_i = \vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \vec{F}_{n-1} \cdot \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

En passant à la limite où n tend vers l'infini, la somme devient une intégrale :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

(C'est similaire au cas du calcul de la valeur moyenne d'un signal à l'aide d'une intégrale : partie I, chapitre 1 (signal), I.2.c.)

On retiendra donc :

Définition : travail d'une force

Le travail d'une force $\vec{F}$ lors du déplacement du point M entre les points A et B est :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W$$

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

L'intégrale s'effectue sur la trajectoire effectivement suivie.
Unité SI : Joule

Remarque : Le travail (élémentaire ou non) dépend du référentiel, car la trajectoire du point M en dépend.

Cas d'une force constante :
$\rightsquigarrow_3$ Reprendre l'expression précédente dans le cas où la force $\vec{F}$ est constante au cours du mouvement, et la simplifier.

$$
\begin{aligned}
W_{AB}(\vec{F}) &= \int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} \\
&= \vec{F}\cdot\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{d}l} \\
&= \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}
\end{aligned}
$$

Exemples

Deux exemples de calcul du travail d'une force :
$\rightsquigarrow_4$ **EC1** (ascension d'un cycliste).
$\rightsquigarrow_5$ **EC1bis** (frottements de l'air).

Le second exemple montre une propriété importante : pour un point de départ A et un point d'arrivée B fixés, le travail d'une force entre A et B dépend en général du chemin suivi.

$\rightsquigarrow_6$ Cela dit, dans le cas du poids, le travail dépend-il du chemin suivi ?
Non, nous avons vu qu'il ne dépend que de la différence d'altitude entre départ et arrivée, pas du chemin suivi.

II – Théorème de l'énergie cinétique

Nous l'avons dit, l'action d'une force sur un point matériel M peut faire varier sa vitesse.
Plus précisément, la puissance d'une force ou son travail entraînent une variation de l'énergie cinétique (et donc de v^2).
Ce lien est explicité par le théorème de l'énergie cinétique, qui peut s'écrire sous les deux formes suivantes.

a/ Version instantanée

Théorème de l'énergie cinétique, version instantanée

Dans un référentiel galiléen, soit un point matériel M, d'énergie cinétique E_c et soumis à une somme de forces que l'on note $\sum \vec{F}$ et dont la somme des puissances associées est $\sum \mathcal{P}(\vec{F})$.
On a :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}).}$$

Ce théorème porte le nom de théorème de l'énergie cinétique (version instantanée), ou de théorème de la puissance cinétique.

b/ Version intégrale

Théorème de l'énergie cinétique, version intégrale

Dans un référentiel galiléen, soit un point matériel M, allant d'un point A à un point B.
Alors sa variation d'énergie cinétique entre A et B est égale au travail de toutes les forces qui s'exercent sur le point :

$$\boxed{E_{c,B} - E_{c,A} = \sum W_{AB}(\vec{F}).}$$

– On note aussi ΔE_c la variation entre A et B : $\Delta E_c = E_{c,B} - E_{c,A}$.
– Ce théorème porte le nom de théorème de l'énergie cinétique (version intégrale).

c/ Démonstrations

(démonstrations à suivre au tableau)

Considérons un point matériel M de masse m, soumis à un ensemble de forces que l'on note $\sum \vec{F}$.

L'étude est effectuée dans un référentiel galiléen.

On applique le PFD au système masse m :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}$$

On prend le produit scalaire par la vitesse $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} & m\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\sum\vec{F} \\ \Leftrightarrow\ & m\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{v}\cdot\vec{F} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum \mathcal{P}(\vec{F}) \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}).} \end{aligned}$$

Passage de la ligne 1 à 2 : $\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\vec{v}\cdot\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}$

Ci-dessus nous avons démontré la version instantanée. Pour arriver à la version intégrale on l'intègre le long de la trajectoire du point A au point B :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}) \\ \Rightarrow\ & \int_A^B \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_A^B \sum \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t \\ \Rightarrow\ & E_{c,B} - E_{c,A} = \sum \int_A^B \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t \\ \Rightarrow\ & \boxed{E_{c,B} - E_{c,A} = \sum W_{AB}(\vec{F}).} \end{aligned}$$

d/ Exemple d'utilisation

$\rightsquigarrow_7$ Glissade sans frottement, faire l'**EC2**.

III – Force conservative et énergie potentielle

1 – Définitions

a/ Force conservative, première définition

Force conservative (définition 1)

Une force est conservative si son travail le long d'une trajectoire AB ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B.

$\rightsquigarrow_8$ Quel force, vue plus tôt dans ce cours, est une force conservative ? Quel exemple n'en est pas une ?

Le poids est une force conservative, la résultante des frottements de l'air n'en est pas une.

b/ Énergie potentielle

Si le travail ne dépend pas du chemin suivi entre deux points fixes A et B, c'est qu'il existe une fonction $f(M)$ telle que

$$W_{AB}(\vec{F}) = f(B) - f(A) = \Delta f.$$

En effet, si c'est le cas, alors le travail ne dépend que des valeurs de f en B et en A, et pas de la trajectoire suivie pour relier ces deux points.

Si une telle fonction existe, on définit l'énergie potentielle associée à $\vec{F}$ comme : $E_p(M) = -f(M)$. On a donc :

$$W_{AB}(\vec{F}) = -(E_p(B) - E_p(A)) = -\Delta E_p.$$

(la notation Δ signifie valeur à l'arrivée moins valeur au départ, donc ici $\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A)$)

Si le point B est proche de A de manière infinitésimale, alors $E_p(B) - E_p(A) = \mathrm{d}E_p$
(on utilise bien un d car c'est la différence d'une fonction, ici E_p, entre deux points proches).

Bilan à retenir :

Force conservative (définition 2)

Une force $\vec{F}$ est conservative s'il existe une fonction $E_p(M)$ telle que le travail élémentaire de $\vec{F}$ est égal à l'opposée de la différentielle de la fonction E_p :

$$\delta W(\vec{F}) = -\mathrm{d}E_p.$$

On dit alors que la force $\vec{F}$ dérive de l'énergie potentielle E_p.

Remarque : Sous forme intégrée, ceci s'écrit $W_{AB}(\vec{F}) = -\Delta E_p$.

Remarque : Lorsque le travail associé à une force est nul, elle n'entre pas dans les bilans énergétiques. On ne dit pas qu'il s'agit d'une force conservative, mais que la force ne travaille pas.

2 – Exemples d'énergies potentielles

a/ Énergie potentielle de pesanteur

On considère un point matériel de masse m dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$.
On choisit un repère cartésien avec un axe z orienté vers le haut.

$\rightsquigarrow_9$ Écrire l'expression du travail élémentaire δW associé au poids. Supposer qu'il s'écrit comme $-\mathrm{d}E_p$, et en déduire une équation différentielle vérifiée par $E_p(z)$. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_p.

Ici $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$ et $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$.

On a donc $\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -mg\vec{e}_z \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -mg\mathrm{d}z$.

Supposons que $\delta W = -\mathrm{d}E_p$.

Alors $\mathrm{d}E_p = mg\mathrm{d}z$, soit $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = mg$, et donc par intégration $E_p(z) = mgz + A$

On choisit a constante A comme on veut car seuls les ΔE_p interviennent. Souvent on la prend nulle.

Il faut savoir refaire cette démonstration, et également retenir le résultat :

Énergie potentielle de pesanteur

Le poids est une force conservative, qui dérive de l'énergie potentielle

$$\boxed{E_p = mgz,}$$

lorsque z est un axe orienté vers le haut.

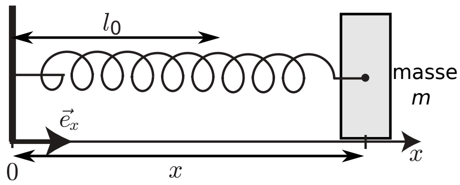
Pour un axe z orienté vers le bas, $E_p = -mgz$.

Remarque : Une énergie potentielle est toujours définie à une constante près. Ci-dessus on l'a choisit pour avoir $E_p(z = 0) = 0$, mais d'autres choix sont possibles.

Remarque : La signification de cette énergie est claire : plus la masse est à une altitude élevée, plus son énergie potentielle de pesanteur est importante. Cette énergie peut être ensuite convertie en une autre forme d'énergie, en énergie cinétique par exemple si on laisse chuter la masse.

b/ Énergie potentielle élastique

On considère une masse m attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. On s'intéresse à la force exercée par le ressort sur la masse.



$\rightsquigarrow_{10}$ Écrire l'expression du travail élémentaire δW associé à $\vec{F}$. Supposer qu'il s'écrit comme $-\mathrm{d}E_p$, et en déduire une équation différentielle vérifiée par $E_p(x)$. En déduire l'expression de l'énergie potentielle E_p.

Ici $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$ et $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} = -k(x - l_0)\vec{e}_x$.

On a donc $\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -k(x - l_0)\mathrm{d}x$.

Supposons que $\delta W = -\mathrm{d}E_p$.

Alors $\mathrm{d}E_p = k(x - l_0)\mathrm{d}x$, soit $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = k(x - l_0)$, et donc par intégration $E_p(x) = \dfrac{1}{2}k(x - l_0)^2 + A$, avec x la longueur totale du ressort.

On choisit a constante A comme on veut car seuls les ΔE_p interviennent. Souvent on la prend nulle.

Il faut savoir refaire cette démonstration, et également retenir le résultat :

Énergie potentielle élastique

La force de rappel d'un ressort est une force conservative, qui dérive de l'énergie potentielle

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2.}$$

Remarque : La signification de cette énergie est claire : plus le ressort est comprimé ou étiré par rapport à sa longueur au repos, plus son énergie potentielle élastique est importante. Cette énergie emmagasinée peut être ensuite convertie en une autre forme d'énergie, en énergie cinétique par exemple si on laisse le ressort se détendre.

3 – Retour à la force à partir de E_p

Il est possible de retrouver l'expression de la force $\vec{F}$ à partir de la connaissance de l'énergie potentielle E_p.
Nous montrons ceci dans le cas unidimensionnel : mouvement selon un axe x et force $\vec{F} = F\vec{e}_x$.

$$\begin{aligned} & \delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \\ \Rightarrow \quad & -\mathrm{d}E_p = F\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \quad & F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}. \end{aligned}$$

On comprend alors pourquoi on dit que "la force dérive de l'énergie potentielle".

IV – Théorème de l'énergie mécanique

a/ Définition

Définition : énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un point matériel M est la somme de son énergie cinétique et de l'énergie potentielle de toutes les forces conservatives auxquelles il est soumis :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p.}$$

b/ Le théorème

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, soit un point matériel M, allant d'un point A à un point B.

Alors sa variation d'énergie mécanique entre A et B est égale au travail de toutes les forces non conservatives qui s'exercent sur le point :

$$\boxed{E_{m,B} - E_{m,A} = \sum W_{AB,\text{nc}}(\vec{F}).}$$

- On note aussi $\Delta E_m = \sum W_{AB,\text{nc}}(\vec{F})$.
- Attention, seules les forces <u>non conservatives</u> interviennent dans les travaux à droite. Les forces conservatives sont prises en compte via leurs énergies potentielles.

Cas particulier important :
Si toutes les forces sont conservatives ou ne travaillent pas, alors $\Delta E_m = 0$: l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

Le cas où les forces sont conservatives ou ne travaillent pas est important.

- C'est souvent le cas lorsqu'on néglige tout type de frottements. On comprend le vocabulaire : une force conservative "conserve" l'énergie mécanique. On parle alors de mouvement conservatif.
- Dans ce cas, le théorème de l'énergie mécanique fournit une quantité, E_m, constante au cours du mouvement. On dit que E_m est une *intégrale première* du mouvement.
- On peut obtenir la valeur de E_m en l'évaluant à $t = 0$ (conditions initiales).
- En exploitant le fait que $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$, on peut aboutir à l'équation du mouvement (s'il n'y a qu'un seul degré de liberté).

c/ Une démonstration

(démonstrations à suivre au tableau)

Dans un référentiel galiléen, considérons un point matériel M de masse m, allant d'un point A à un point B, et soumis à un ensemble de forces que l'on note $\sum_i \vec{F}_i$.

On applique le théorème de l'énergie cinétique au point M :

$$\Delta E_c = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i).$$

On sépare les forces en deux catégories :

- Celles qui sont conservatives. Elles dérivent d'une énergie potentielle $E_{p,i}$ et donc $W_{AB}(\vec{F}_i) = -\Delta E_{p,i}$.
- Celles qui ne sont pas conservatives.

On a donc :

$$\Delta E_c = \sum_{i,\text{non conservatives}} W_{AB}(\vec{F}_i) + \sum_i -\Delta E_{p,i}$$

$$\Rightarrow \ \Delta E_c + \sum_i \Delta E_{p,i} = \sum_{i,\text{non conservatives}} W_{AB}(\vec{F}_i)$$

C'est bien le théorème de l'énergie mécanique.

$\rightarrow$ On retiendra donc qu'il s'agit simplement d'une reformulation du théorème de l'énergie cinétique, où les travaux des forces conservatives ont été écrit sous forme de ΔE_p.

d/ Exemples d'applications

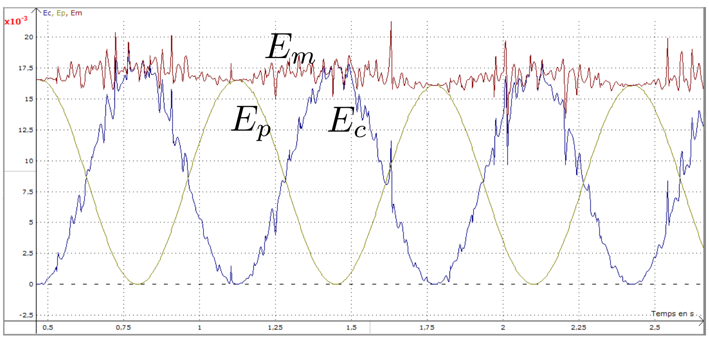
$\rightsquigarrow_{11}$ **EC3** : chute libre.
$\rightsquigarrow_{12}$ **EC4** : pendule simple.

Expérience : On dispose d'un pendule avec un capteur de position angulaire. On réalise une acquisition sur une dizaine d'oscillations.

On mesure $L = 0{,}45\,\text{m}$, $m = 0{,}180\,\text{g}$, on connaît $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. On suppose que les hypothèses de l'étude s'appliquent.

On calcule alors $\dot\theta$, puis $E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot\theta^2$ et $E_p = mgL(1-\cos\theta)$.

Observations ci-contre.



V – Mouvement conservatif à un degré de liberté

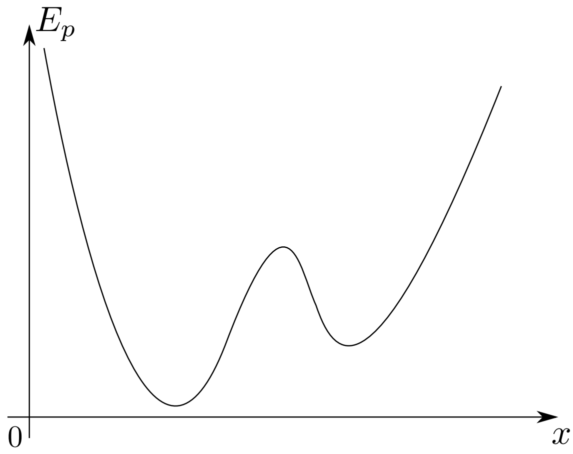
Introduction du problème et graphe d'énergie potentielle

Dans toute cette partie on considère :

- un point matériel M soumis seulement à des forces conservatives, qui dérivent d'une énergie potentielle totale E_p ;
- une situation à un degré de liberté, par exemple un mouvement selon un axe x et donc une énergie potentielle $E_p(x)$;
- on note $\vec{F} = F(x)\,\vec{e}_x$ la force totale s'exerçant sur M et dérivant de E_p.

On peut représenter $E_p(x)$, par exemple ci-contre.

On peut imaginer qu'on décrit l'évolution d'un mobile glissant sans frottement sur une surface courbe dont la hauteur $z = z(x)$ correspond à $E_p(x) = mg\,z(x)$. Mais la situation décrite est bien plus générale.



tracé de $E_p(x)$, à compléter

Nous allons voir que le graphe d'énergie potentielle permet d'obtenir beaucoup d'informations sur les mouvements possibles.

1 – Type de trajectoire et positions de vitesse nulle

a/ Détermination du type de trajectoire

L'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p(x)$ est constante au cours du mouvement (car conservatif). Sa valeur est donnée par les conditions initiales.

On peut la tracer sur le graphe d'énergie potentielle ci-dessus.

$\rightsquigarrow_{13}$ Montrer simplement que $\forall t$, $E_m \geq E_p(x)$, et que $E_m = E_p(x)$ signifie que $v = 0$ au point x.

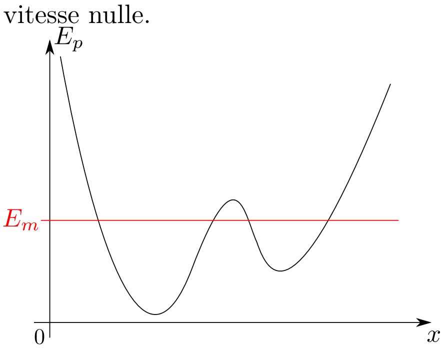
– $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_p(x) \geq E_p(x)$ car le terme en v^2 est positif ou nul.

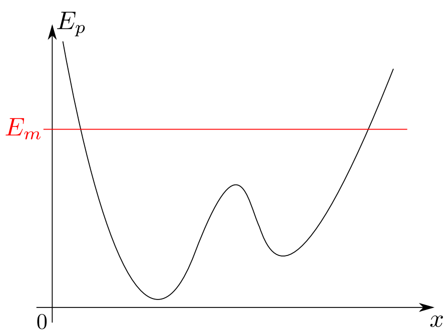
– $E_m = E_p(x) \quad \Leftrightarrow \quad E_c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0.$

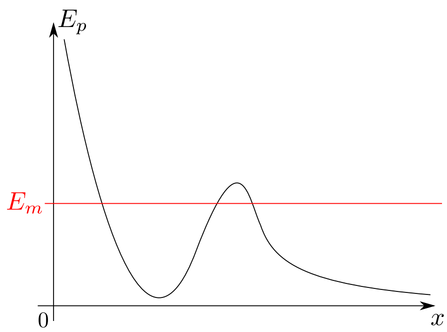
Méthode : analyse d'un graphe d'énergie potentielle (1)

- ▶ Les conditions initiales déterminent la valeur (constante) de E_m, que l'on trace sur le graphe de $E_p(x)$.
- ▶ Les mouvements possibles vérifient $E_p(x) \leq E_m$: ceci permet de savoir si le mouvement est périodique ou non, si la trajectoire est bornée ou non.
- ▶ Les points d'intersection de E_m et de $E_p(x)$ sont des points de vitesse nulle.

$\rightsquigarrow_{14}$ Compléter les schémas ci-dessous en indiquant le type de mouvement possible dans chaque zone, et les points de vitesse nulle.







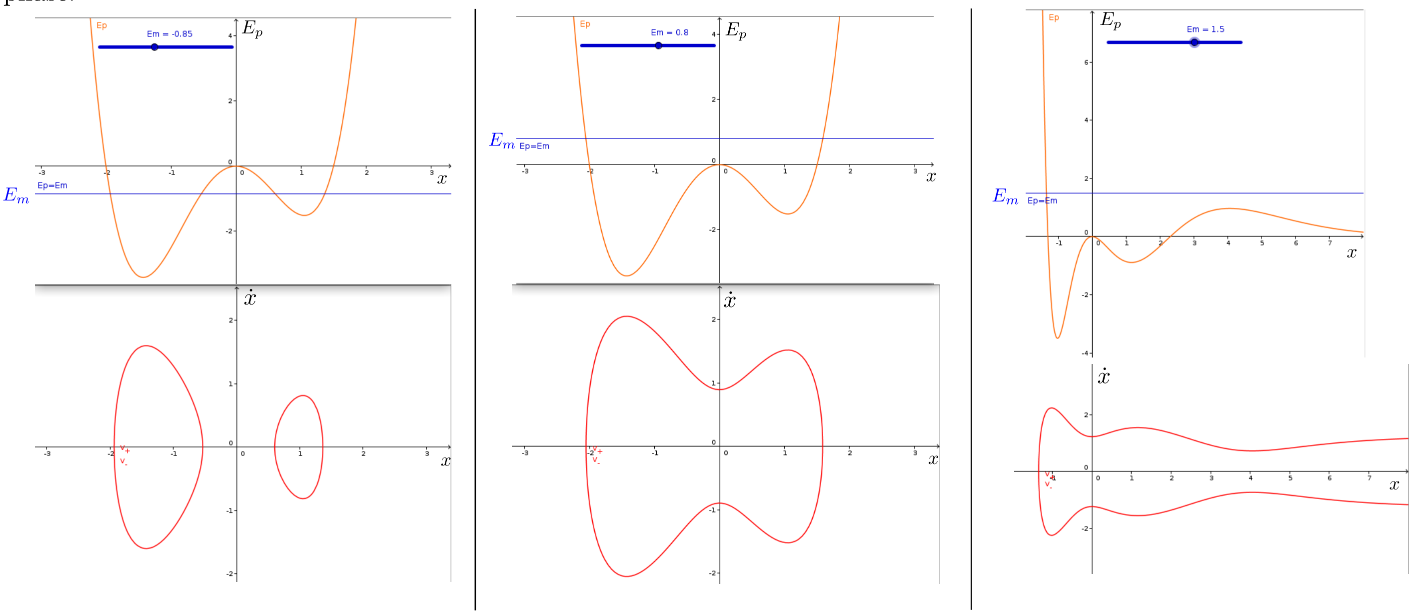
graphes à compléter

b/ Lien avec le portrait de phase

Les considérations qui précèdent permettent de faire le lien entre portrait de phase et graphe $E_p(x)$.

Exploitation du graphe de $E_p(x)$	Conséquence dans le portrait de phase
Trajectoire bornée périodique	Trajectoire fermée
Trajectoire non bornée	Trajectoire ouverte
Point de vitesse nulle	La trajectoire coupe l'axe des abscisses

$\rightsquigarrow_{15}$ Compléter les schémas ci-dessus en mettant en évidence les correspondances entre graphe de $E_p(x)$ et portrait de phase.



graphes à compléter | voir aussi animation Geogebra

2 – Franchissement d'une barrière de potentiel

On appelle barrière de potentiel une zone de l'espace où le potentiel $E_p(x)$ admet un maximum local.
Il est alors intéressant de se demander sous quelle condition un mobile peut franchir cette barrière.

$\rightsquigarrow_{16}$ Faire l'exemple décrit dans l'**EC5**.

3 – Positions d'équilibre stables ou instables

Rappel du III.3 : la force est donnée par $\vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x$.

$\rightsquigarrow_{17}$ D'après ce résultat, que vaut la force en un point où $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0$? Comment peut-on appeler un tel point x ?

On a alors $\vec{F} = \vec{0}$. Si le mobile est en ce point avec une vitesse nulle, alors il y reste : c'est une position d'équilibre.

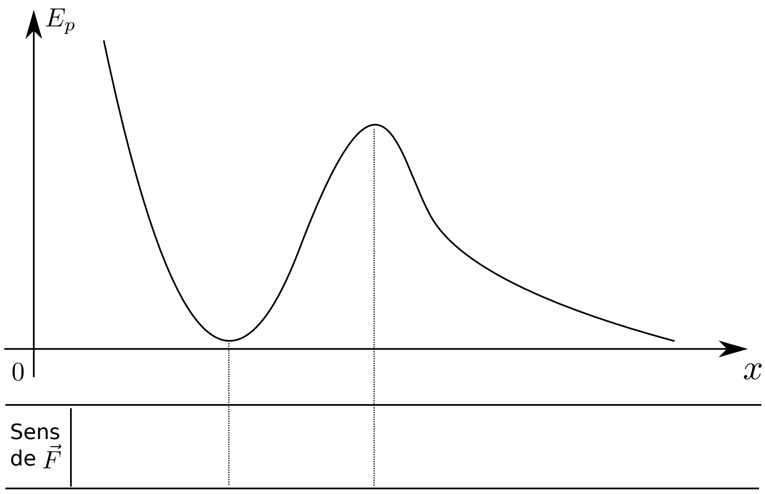
Les positions d'équilibre peuvent être de deux types :

- Elle est stable lorsqu'un petit mouvement du point M entraîne un retour vers la position d'équilibre.
- Elle est instable lorsqu'un petit mouvement du point M entraîne un éloignement de la position d'équilibre.

Exemples : une bille au fond d'un bol (équilibre stable), un stylo posé sur sa pointe (équilibre instable).

$\rightsquigarrow_{18}$ Sur le graphe ci-contre, faire apparaître le sens de la force $\vec{F}$ (vers la gauche ou vers la droite ?) autour de chaque position d'équilibre, et en déduire la stabilité de ces positions. Conclure sur un critère de stabilité à partir du graphe de $E_p(x)$.

graphe à compléter



Méthode : analyse d'un graphe d'énergie potentielle (2)

- Les positions x où $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x) = 0$ sont des positions d'équilibre.
- La stabilité de l'équilibre est donnée par le signe de $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x)$:
  - stable si $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} > 0$ (graphe du type $f(x) = x^2$ pour lequel $f'' = 2 > 0$) ;
  - instable si $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} < 0$ (graphe du type $f(x) = -x^2$).

4 – Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

Notion mathématique : développement limité

Soit f une fonction (suffisamment dérivable) et x_0 un point.
On peut approcher les valeurs de f autour du point x_0 à l'aide d'un développement limité :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x-x_0)f'(x_0)}_{\text{terme d'ordre 1}} + \underbrace{\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)}_{\text{terme d'ordre 2}} + \underbrace{\frac{(x-x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0)}_{\text{terme d'ordre 3}} + \underbrace{\mathrm{o}\Big((x-x_0)^3\Big)}_{\text{termes négligeables devant les autres}}$$

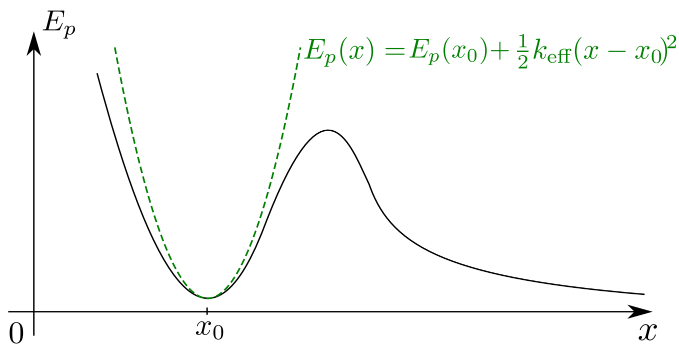
Nous l'avons écrit à l'ordre 3 ci-dessus, mais il peut être mené à n'importe quel ordre.
L'écriture de chaque terme permet d'être de plus en plus précis dans la description de f autour de x_0.

a/ Mouvements de faible amplitude et approximation linéaire

Notons x_0 la position d'un équilibre stable. On s'intéresse ici au mouvement du point M lorsqu'il reste au voisinage de x_0.

On peut effectuer un développement limité à l'ordre 2 du potentiel autour de x_0 :

$$E_p(x) \underset{x\to x_0}{\simeq} E_p(x_0) + (x-x_0)\underbrace{E_p'(x_0)}_{=0 \text{ car équ.}} + \frac{(x-x_0)^2}{2}E_p''(x_0).$$



On a donc :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} E_p''(x_0),$$

$\rightsquigarrow_{19}$ Écrire alors l'expression de l'énergie mécanique (en fonction de $\dot{x}$ et x), et en déduire l'équation du mouvement. Quel type d'équation bien connue obtient-on ? Quelle est la forme générale des solutions ?

Posons $k = E_p''(x_0)$. L'énergie mécanique est :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} k.$$

Le mouvement étant conservatif, on a $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$, donc :

$$0 = \frac{1}{2}m\, 2\ddot{x}\dot{x} + \frac{2\dot{x}(x-x_0)}{2} k.$$

D'où l'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_0.$$

Il s'agit de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

($k = E_p''(x_0) > 0$ car équilibre stable.)

Les solutions sont du type

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

Attention, ceci est pour des mouvements de petites amplitudes autour du point d'équilibre x_0.

Approximation harmonique

Le potentiel autour d'un point d'équilibre stable peut être approché par un puits de potentiel harmonique, du type

$$E_p(x) = E_p(x_0) + E_p''(x_0)(x-x_0)^2/2.$$

Le mouvement au voisinage proche d'un point d'équilibre stable peut donc être approché par celui d'un oscillateur harmonique.

On dit qu'on a effectué une *approximation linéaire*, en négligeant les termes d'ordre supérieur dans l'expression approchée du potentiel.

$\rightsquigarrow_{20}$ Dans le cas d'une masse accrochée à un ressort de longueur x (longueur à vide l_0, raideur k), comment s'exprime l'énergie potentielle ? Où y a-t-il une position d'équilibre ? Que vaut alors E_p'' ? En appliquant les résultats de la démonstration qui précède, quelle pulsation trouve-t-on pour les oscillations ?

$E_p = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2$ qui admet un minimum en $x = l_0$: position d'équilibre stable.

On a alors $E_p''(l_0) = k$.

Ainsi, on a $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ce qui est bien le résultat trouvé dans les chapitres précédents.

En conclusion, l'équation de l'oscillateur harmonique est importante car elle permet de modéliser bien plus que le système masse-ressort : elle s'applique en première approximation pour les mouvements de faible amplitude de tout système autour d'une position d'équilibre.

b/ Mouvements d'amplitude plus importante : effets non linéaires

Les termes négligés dans le développement du potentiel ont pour conséquence des écarts par rapport à la solution de l'oscillateur harmonique : période qui dépend de l'amplitude du mouvement, position moyenne différente de x_0, etc.

Ceci est exploré en TD via une approche numérique (exercice VI).