Partie II : Thermodynamique et fluides

Points plus techniques sur la cinématique des écoulements

Cette fiche va au delà du programme de CPGE et ne s'adresse pas vraiment aux étudiants.

Résumé :
Les parties I, II et III vont ensembles :

- I - Il n'y a pas de lien entre l'allure des lignes de courant et le caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement.
- II - En revanche, les opérateurs div et $\overrightarrow{\text{rot}}$ indiquent si la particule de fluide au point M où ils sont exprimés est comprimée ou tourne sur elle-même.

  Nous introduisons le tenseur des gradients de vitesse qui donne une vision complète des déformations des particules de fluide.
- III - Série d'exemples d'écoulement, avec à chaque fois lignes de courant et carte des vitesses tracés sous Python, ainsi que les expressions de div, $\overrightarrow{\text{rot}}$ et G.

Ensuite :

- V - Lien entre stationnarité/incompressible/ρ = cst et conservation des débits massique ou volumique.

I Lien entre l'allure des lignes de courant et le caractère rotationnel ou divergent

On considère un écoulement stationnaire (ou, dans le cas contraire, la carte de l'écoulement à t fixé).

I.1 lignes de courant – caractère rotationnel

Il n'y a pas de lien évident entre l'allure des lignes de courant et le caractère rotationnel de l'écoulement. En effet, tout est possible :

- Un écoulement avec des lignes de courant fermées peut être rotationnel ou irrotationnel :
  - **Exemple :** Lignes de courant fermées et écoulement rotationnel avec la rotation solide $\vec{v} = r\Omega\vec{e}_\theta$ (voir partie III.3 pour des détails et cartes).
  - **Exemple :** Lignes de courant fermées et écoulement irrotationnel avec l'écoulement dit tourbillonaire en $\vec{v} = \frac{\alpha}{r}\vec{e}_\theta$ (voir partie III.4 pour des détails et cartes).
- Un écoulement avec des lignes de courant non fermées peut être rotationnel ou irrotationnel :
  - **Exemple :** Lignes de courant non fermées et écoulement rotationnel avec l'écoulement de cisaillement en $\vec{v} = \alpha y\vec{e}_x$ (voir partie III.2 pour des détails et cartes).
  - **Exemple :** Lignes de courant non fermées et écoulement irrotationnel avec l'écoulement tout simple en $\vec{v} = \alpha\vec{e}_x$.

I.2 lignes de courant – caractère divergent

Rappelons qu'un écoulement divergent est tel que $\operatorname{div}\vec{v} \neq 0$, et que ceci est équivalent à "écoulement compressible". De même non divergent est équivalent à incompressible.

Ici encore, il n'y a pas de lien évident.

► En particulier, on ne peut pas conclure au caractère compressible ou non en regardant si les lignes de courant convergent ou divergent : l'écoulement peut alors être, ou non, divergent.

- ▷ **Exemple :** Penser à un écoulement d'eau (incompressible donc) dans une conduite qui se resserre. Les lignes de courant se rapprochent, mais la vitesse augmente juste assez pour satisfaire la conservation du débit volumique et donc $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.
- ▷ **Exemple :** Penser à toutes les cartes de champ magnétique, qui vérifient $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, et qui pourtant présentent des zones de convergences ou de divergences des lignes de champ.
- ▷ **Exemple :** L'écoulement horizontal accéléré en $\vec{v} = \alpha x \vec{e}_x$ est divergent alors que les lignes de courant sont horizontales (voir partie III.1 pour des détails et cartes).

II Lien entre le mouvement local des particules de fluide et le caractère rotationnel ou divergent

La partie précédente montre qu'il n'est pas évident de faire un lien entre l'allure des lignes de courant et les valeurs locales des opérateurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ et div.

Il y a en revanche un lien immédiat entre $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ et div et le mouvement local d'une particule de fluide.

II.1 Mouvement des pdf – caractère rotationnel

$\vec{\omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ définit le vecteur tourbillon. On montre qu'une particule de fluide au point M tourne sur elle-même en rotation solide portée par le vecteur $\vec{\omega}(M)$.

- ▷ **Exemple :** la rotation solide en $\vec{v} = r\Omega\vec{e}_\theta$, pour laquelle on a bien $\vec{\omega} = \Omega\vec{e}_z$, voir partie III.3.

Voir partie III pour d'autres calculs.

II.2 Mouvement des pdf – caractère divergent

Considérons une particule de fluide de volume V. Soit $\mathrm{d}V$ la variation de son volume pendant le temps $\mathrm{d}t$.
Le taux de dilatation est donné par $\dfrac{1}{V}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \operatorname{div}\vec{v}$.

Ainsi $\operatorname{div}\vec{v}$ donne la variation relative du volume des particules de fluide.
On voit directement le lien entre le caractère incompressible et la nullité de $\operatorname{div}\vec{v}$.

Voir partie III pour des exemples.

II.3 Mais il manque l'information sur le cisaillement – introduction du tenseur de déformation

Les deux paragraphes précédents montrent l'importance des opérateurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ et div pour caractériser le mouvement d'une particule de fluide. Ils ne sont néanmoins pas suffisants. Si on veut être complet, il faut introduire le tenseur des taux de déformation (ou des gradients de vitesse), dont le terme général est :

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Ce tenseur contient toute l'information sur la façon dont la vitesse change entre deux points proches, deux points d'une même particule de fluide par exemple. Si ces points vont à des vitesses différentes, la particule de fluide ne subit pas une simple translation : elle se déforme. Le tenseur G permet donc d'étudier complètement les déformations des particules de fluide (dans la limite des petites déformations) : rotation, dilatation, déformation angulaire.

L'objectif n'est pas de répéter tout un chapitre de cinématique des fluide ici. On pourra consulter la page `http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M02_G02/co/Contenu_22.html` qui est très bien faite, notamment les schémas, ou encore le livre [1] §3.2.

> Pour résumer brièvement les choses, on peut dire que le tenseur G se décompose comme la somme de deux tenseurs :
>
> $$G_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij},$$
>
> où :
>
> - ▷ e_{ij} est symétrique.
>
>   Ses composantes diagonales sont $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$. Elles caractérisent l'étirement (ou dilatation) de la particule de fluide dans chacune des directions x, y et z. La trace de e_{ij} est $\operatorname{div}\vec{v}$ et caractérise la variation de volume de la particule de fluide (voir précédemment). On a toutefois plus d'information qu'avec la divergence seule, car on peut avoir par exemple $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ alors qu'il y a une dilatation selon x et une compression selon y qui se compensent.
>
>   Ses composantes non diagonales sont $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$. Elles caractérisent une déformation angulaire de la particule de fluide, sans changement de volume ni rotation solide.
>
>   C'est cette dernière information qui manque lorsque l'on ne considère que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ et $\operatorname{div}\vec{v}$. L'exemple III.5 montre un écoulement où les pdf ne sont déformées que par déformation angulaire.
>
> - ▷ ω_{ij} est antisymétrique, de terme général $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$.
>
>   Il caractérise la rotation solide de la particule de fluide. Il donne les composantes du vecteur tourbillon $\vec{\omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$.
>
> La variation du champ de vitesse entre un point $\vec{r}$ et $\vec{r} + \overrightarrow{\mathrm{d}r}$ s'écrit
>
> $$\vec{v}(\vec{r} + \overrightarrow{\mathrm{d}r}) = \vec{v}(\vec{r}) + e\,\overrightarrow{\mathrm{d}r} + \omega \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}r}, \tag{1}$$
>
> avec le terme en e qui donne dilatation+déformation angulaire et celui en ω qui donne la rotation.

III Des exemples

On considère des écoulements bidimensionnels dans le plan (x, y).

On donne à chaque fois la divergence, le rotationnel, et le tenseur des gradients de vitesse

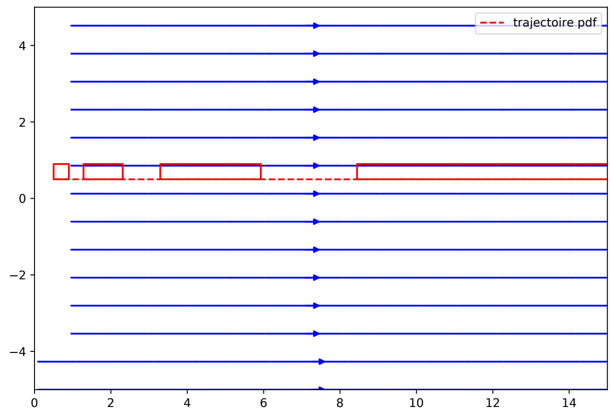
$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

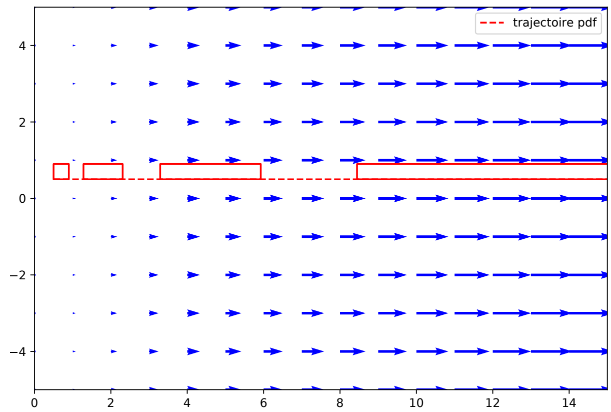
On trace une carte des lignes de courant, et une carte du champ des vitesses (tracé sous Python).

Le carré rouge est une particule de fluide, qui est représentée à différents instants à mesure qu'elle se déplace dans l'écoulement et qu'elle subit des déformations.

III.1 Exemple 1 : écoulement horizontal accéléré

$$\begin{cases} v_x = \alpha x \\ v_y = 0 \end{cases} \tag{3}$$



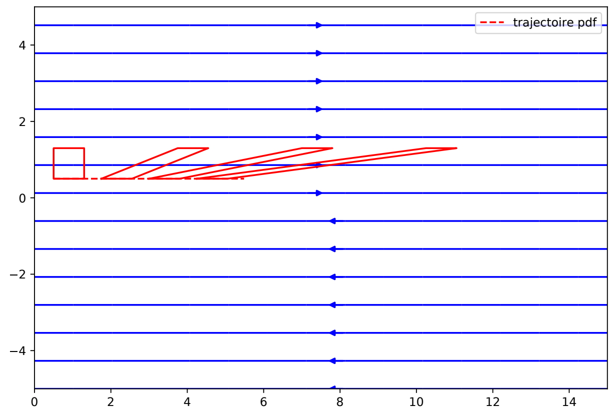


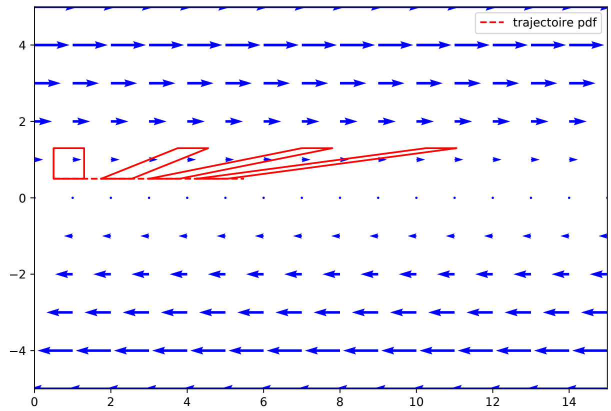
On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{v} = \alpha, \qquad G = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

III.2 Exemple 2 : écoulement de cisaillement

$$\begin{cases} v_x = \alpha y \\ v_y = 0 \end{cases} \tag{5}$$





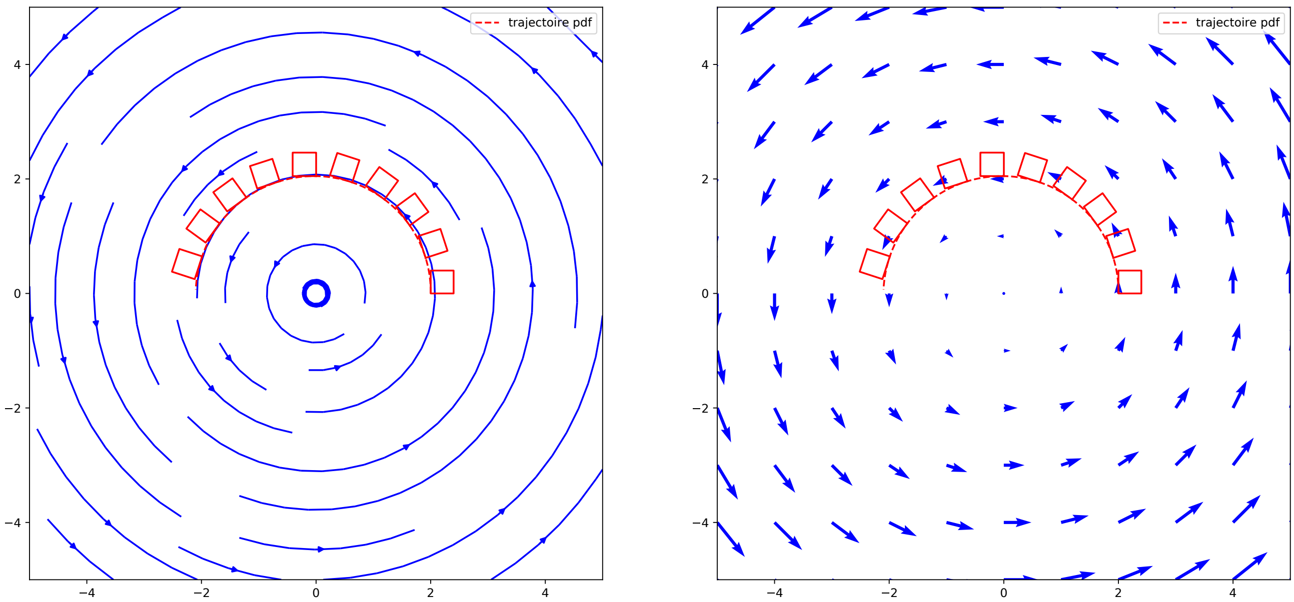
On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = -\alpha\vec{e}_z, \qquad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Remarque : Il y a à la fois déformation angulaire et rotation pure, qui se compensent pour que certains cotés de la particule fluide restent parallèles tout au long du mouvement.

III.3 Exemple 3 : rotation solide

$$\begin{cases} v_x = -\Omega y \\ v_y = \Omega x \end{cases}, \quad \text{soit encore} \quad \vec{v} = r\Omega \vec{e}_\theta \quad \text{(polaires)} \tag{7}$$



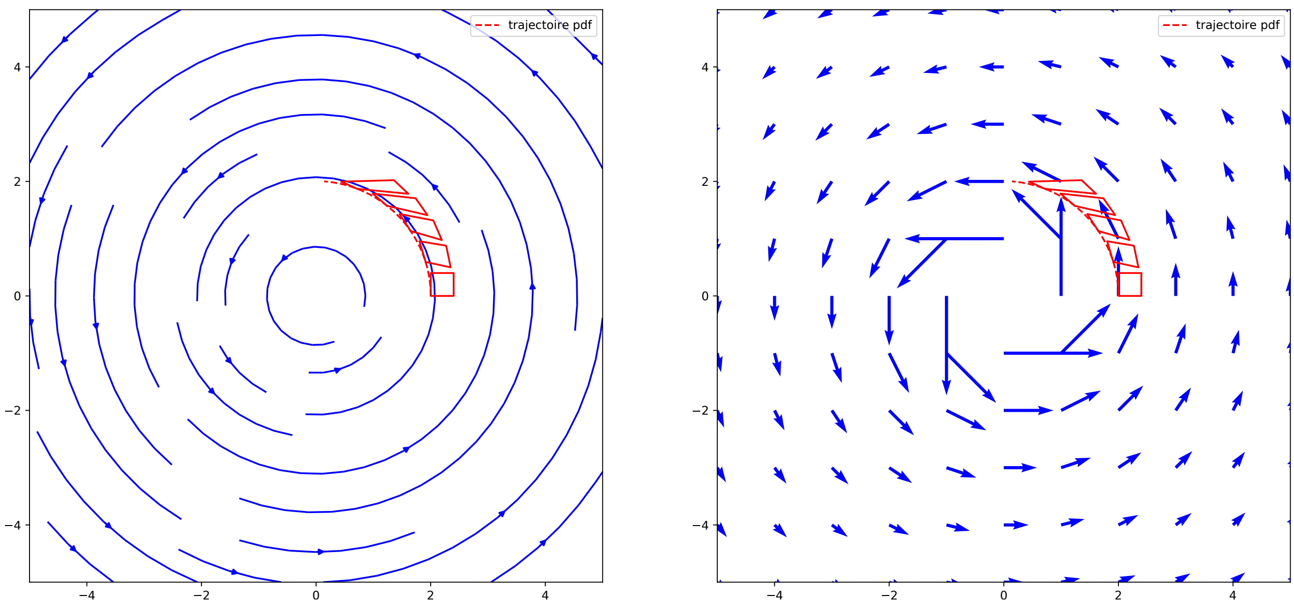
On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = 2\Omega \vec{e}_z, \qquad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

On retrouve bien que la vitesse angulaire de rotation est donnée par $\Omega \vec{e}_z = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$.
Le tenseur G du gradient des vitesse est purement antisymétrique, signe d'une rotation pure des particules de fluide.

III.4 Exemple 4 : rotation tourbillonnnaire

$$\begin{cases} v_x = -\alpha \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ v_y = \alpha \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}, \quad \text{soit encore} \quad \vec{v} = \frac{\alpha}{r} \vec{e}_\theta \quad \text{(polaires)} \tag{9}$$



On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \qquad G = \alpha \begin{pmatrix} \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \tag{10}$$

C'est un exemple où les lignes de courants sont fermées, ce sont même des cercles concentriques, et pourtant $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$. On voit sur le graphique que la particule de fluide ne tourne pas sur elle-même : elle est en translation circulaire.

De plus l'écoulement est non divergent, donc la surface de la particule de fluide ne change pas non plus.

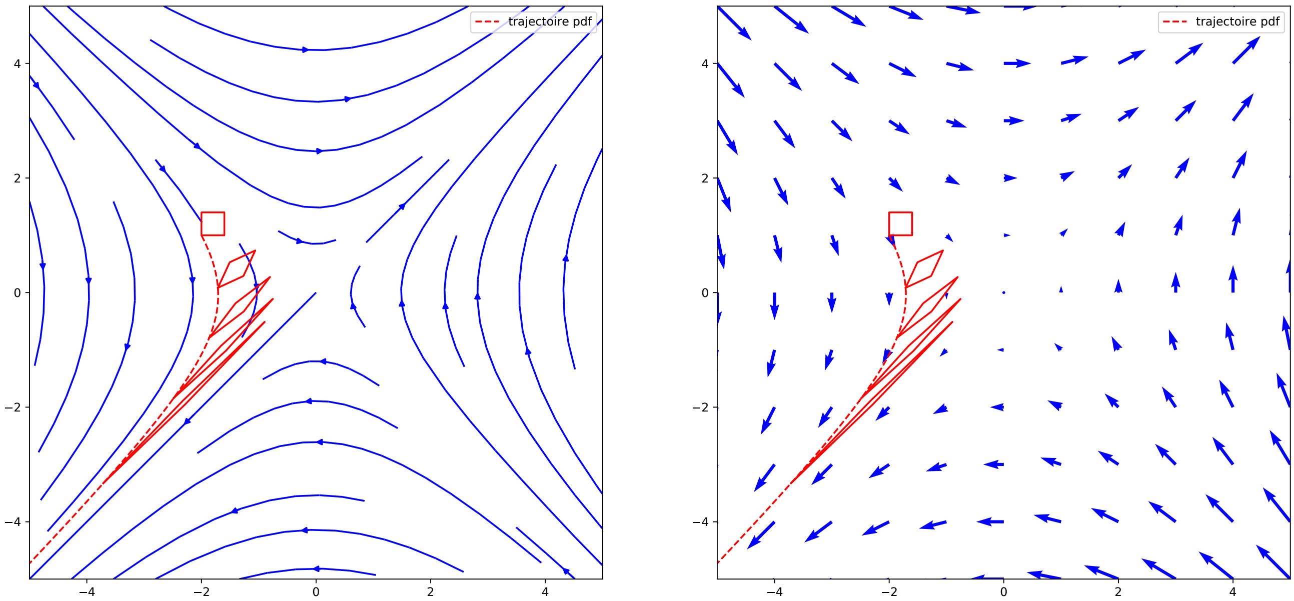
Il y a pourtant bien des déformations. Il faut ici regarder le tenseur G pour bien comprendre : bien que la trace de G soit nulle, les termes diagonaux ne le sont pas, et il y a donc élongation de la particule dans chacune des directions. De plus, les termes non diagonaux sont symétriques, ils traduisent donc une déformation angulaire de la particule, ce qui se voit bien sur le graphique.

Remarque : On a d'une part $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ partout, et d'autre part la circulation de $\vec{v}$ sur un cercle centré en O de rayon r est $\displaystyle\oint \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = 2\pi\alpha$ et est non nulle.

Le théorème de Stokes dit pourtant que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\mathcal{S}} (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$! Est-ce qu'il ne s'applique pas ici ? Et bien non, il ne s'applique pas à cause de la singularité en O du champ de vitesse.

III.5 Exemple 5 : point X

$$\begin{cases} v_x = \alpha y \\ v_y = \alpha x \end{cases} \tag{11}$$



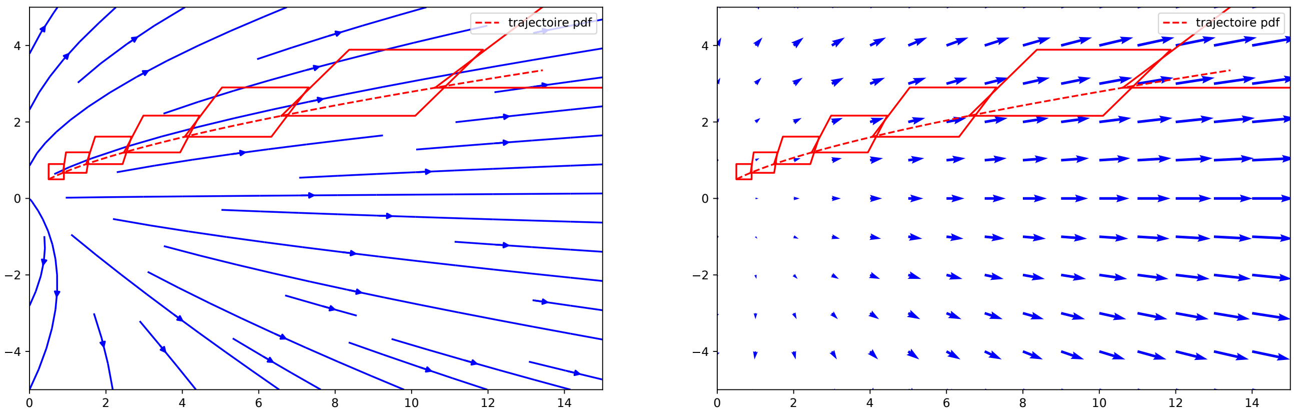
On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Pas de rotation, pas d'élongation, mais une déformation angulaire pure (tenseur G symétrique et à éléments diagonaux nuls).

III.6 Exemple 6 : un peu de tout

$$\begin{cases} v_x = \alpha(3x+y) \\ v_y = 2\alpha y \end{cases} \tag{13}$$



On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = -\alpha\vec{e}_z, \quad \mathrm{div}\,\vec{v} = 5\alpha, \quad G = \alpha\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

On a de la rotation, de l'élongation, et de la déformation angulaire.

IV Interprétation eulerienne des opérateurs divergence et rotationnel

... une autre fois ...

V Lien entre stationnarité/incompressible/$\rho = $ cst et conservation des débits massique ou volumique

Stationnaire $\Leftrightarrow$ D_m conservé, incompressible $\Leftrightarrow$ D_v conservé

Deux façons d'écrire l'équation de conservation de la masse :

- D'abord sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0.} \tag{15}$$

  On voit alors immédiatement que stationnaire (donc $\partial\rho/\partial t = 0$) est équivalent à $\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$. Or

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\rho\vec{v})\mathrm{d}V = \oiint_{\mathcal{S}} \rho\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}. \tag{16}$$

  Donc $\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$ est équivalent à $\oiint_{\mathcal{S}} \rho\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$ pour toute surface $\mathcal{S}$ fermée.

  C'est donc équivalent à la conservation du débit massique à travers tout tube de courant.

  En résumé :

$$\boxed{\text{stationnaire} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_m \text{ se conserve à travers tout tube de courant.}} \tag{17}$$

- Ensuite sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0,} \tag{18}$$

avec par définition la dérivée particulaire :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} &\equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot(\vec{\nabla}\rho),\end{aligned} \tag{19}$$

qui a pour sens physique de donner l'évolution de ρ lorsque l'on suit une particule de fluide dans son mouvement.

On voit alors immédiatement que incompressible (donc $\mathrm{D}\rho/\mathrm{D}t = 0$, c-à-d que les particules de fluide ne se compriment pas) est équivalent à $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ (écoulement non divergent). Or

$$\iint \mathcal{V} \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}V = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}, \tag{20}$$

Donc $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ est équivalent à $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$ pour toute surface $\mathcal{S}$ fermée.

C'est donc équivalent à la conservation du débit volumique à travers tout tube de courant.

En résumé :

$$\boxed{\text{pdf incompressibles} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_v \text{ se conserve à travers tout tube de courant.}} \tag{21}$$

Attention, ces deux conservations s'entendent à t fixé : le long d'un tube de courant, à t fixé, D_m ou D_v prennent la même valeur quelle que soit la section considérée.

Et quand à-t-on $\rho = \text{cst}$?

Incompressible n'implique pas ρ uniforme et constant. Incompressible implique seulement $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$, donc que la masse volumique de chaque particule de fluide reste constante. Mais si elle n'est pas uniforme initialement, alors elle reste non uniforme. A contrario, si elle est uniforme initialement, alors elle le reste ensuite à tout temps.
Ainsi on a

$$\boxed{\forall t,\ \forall\ M,\ \rho(M,t) = \text{cst} \quad \Leftrightarrow \quad \rho \text{ uniforme à } t=0 \text{ et incompressible.}} \tag{22}$$

C'est le cas par exemple pour un écoulement d'air autour d'un obstacle : loin avant l'obstacle ρ est uniforme, et si l'écoulement est incompressible (ce qui est le cas s'il est subsonique pour de l'air), alors ρ reste uniforme même en contournant l'obstacle.

Enfin, qu'implique d'avoir en même temps les deux hypothèses stationnaire + incompressible ? En manipulant les équations **??** et 18 ci-dessus, on arrive à $\vec{v}\cdot(\vec{\nabla}\rho) = 0$: le gradient de densité est perpendiculaire à la vitesse. Ceci n'implique donc pas ρ uniforme.

Références

[1] E. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit. Hydrodynamique physique. EDP Science, 2012.