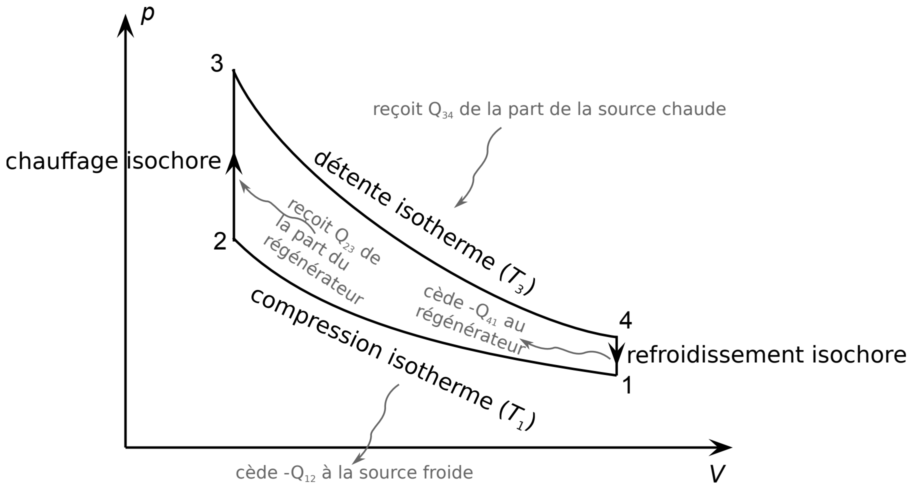
Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Rappels de thermodynamique

Correction – DM 5 – Étude du cycle du moteur de Stirling

1 - On a le cycle schématisé ci-dessous.

Il est parcouru dans le sens horaire, s'agit donc d'un cycle moteur ($\int p\mathrm{d}V$ sur un cycle est positive, donc le travail reçu $= -\int p\mathrm{d}V$ est négatif, c'est donc que pendant un cycle le fluide fournit du travail au milieu extérieur).



2 - Posons le problème :

- Système : {gaz contenu dans le cylindre}, c'est un système fermé (donc $n = \text{cst}$).
- Transformation : compression isotherme réversible d'un gaz supposé parfait, entre les états :

$$\text{État initial}\left|\begin{array}{l} T_1 = 300\,\mathrm{K} \\ p_1 \\ V_1 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{isotherme, réversible, GP}} \text{État final}\left|\begin{array}{l} T_2 \\ p_2 \\ V_2 = V_1/\rho \end{array}\right.$$

Pour calculer le travail, on effectue :

$$W_{12} = -\int_1^2 p_{\text{ext}}\mathrm{d}V = -\int_1^2 p\mathrm{d}V = -\int_1^2 nRT_1\mathrm{d}V = -nRT_1\int_1^2 \mathrm{d}V = -nRT_1\ln(V_2/V_1).$$

On a utilisé pour la 2[e] égalité le fait que $p = p_{\text{ext}}$ à tout instant car la transformation est réversible, pour la 3[e] égalité la loi des gaz parfait, et pour la 4[e] le fait que n et T sont constants (système fermé, et évolution isotherme). Le calcul donne donc : $\boxed{W_{12} = nRT_1\ln\rho}$.

Ensuite, pour un gaz parfait la variation d'énergie interne est $\Delta U = C_v\Delta T = 0$ ici car l'évolution est isotherme.

On applique donc le premier principe au système {gaz} pour avoir : $0 = \Delta U = W_{12} + Q_{12}$. On en déduit $\boxed{Q_{12} = -nRT_1\ln\rho}$.

Comme $\rho > 1$, on a $W_{12} > 0$ et $Q_{12} < 0$.

On s'y attendait puisqu'il s'agit d'une compression du gaz, pour laquelle il faut effectivement fournir du travail (pour comprimer) (d'où $W > 0$), et qui a pour effet d'échauffer le gaz et donc de produire un transfert thermique du gaz vers l'extérieur (d'où $Q < 0$).

3 - Posons le problème :

- Système : {gaz contenu dans le cylindre}, c'est un système fermé (donc $n = \text{cst}$).

- Transformation : échauffement isochore réversible d'un gaz supposé parfait, entre les états :

$$\text{État initial} \left| \begin{array}{l} T_2 = T_1 = 300\,\mathrm{K} \\ p_2 \\ V_2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{isochore, réversible, GP}} \text{État final} \left| \begin{array}{l} T_3 = 600\,\mathrm{K} \\ p_3 \\ V_3 = V_2 \end{array} \right.$$

La transformation est isochore donc le travail des forces de pression est $W_{23} = -\int p_{\text{ext}} \mathrm{d}V = 0$.

On peut donc applique le premier principe pour trouver le transfert thermique Q_{23} : on a $\Delta U = W_{23} + Q_{23} = Q_{23}$, et comme il s'agit d'un gaz parfait on a $\Delta U = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_1)$.

D'où finalement : $\boxed{Q_{23} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_1)}$ (on a utilisé $T_2 = T_1$). Comme $T_3 > T_1$, on a $Q_{23} > 0$. C'est normal puisqu'il s'agit d'un échauffement, donc le gaz reçoit effectivement de la chaleur.

4 - Il s'agit, tout comme à la question 2, d'une transformation isotherme réversible. Cette fois la température est T_3, et il faut inverser le rapport des volumes car on passe de $V_3 = V_2$ à $V_4 = V_1$ (alors qu'en 2 on passait de V_1 à V_2). On trouve donc cette fois $\boxed{W_{34} = -nRT_3 \ln \rho}$ et $\boxed{Q_{34} = nRT_3 \ln \rho}$.

On a $W_{34} < 0$ et $Q_{34} > 0$. Il s'agit d'une détente, donc le gaz fournit du travail au milieu extérieur ($W_{34} < 0$) et se refroidit donc reçoit un transfert thermique venant de l'extérieur ($Q_{34} > 0$).

5 - Tout comme à la question 3, il s'agit d'un refroidissement isochore, cette fois de la température T_1 à la température $T_4 = T_3$. On trouve donc cette fois $\boxed{Q_{41} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_3)}$. Comme $T_3 > T_1$, on a $Q_{41} < 0$.

C'est normal puisqu'il s'agit d'un refroidissement, donc le gaz fournit effectivement de la chaleur au milieu extérieur

6 - La grandeur coûteuse est à rechercher dans les transferts thermiques Q, puisque ce sont eux que l'on doit produire pour faire tourner le moteur.

Ici on indique que le régénérateur assure un transfert parfait entre l'énergie Q_{41} perdue par le système lors de l'étape 4-1 et l'énergie Q_{23} reçue par le système lors de l'étape 2-3. Cette énergie thermique reçue Q_{23} ne coûte donc rien.

De plus, $Q_{12} < 0$ est de la chaleur perdue par le système. Le seul transfert thermique qui coûte est donc Q_{34}, qui est positif donc bien reçu par le système.

La grandeur d'intérêt est ici le travail récupéré au cours d'un cycle, c'est-à-dire le travail cédé au milieu extérieur.

C'est l'opposé du travail W reçu par le gaz au cours d'un cycle : $W_{\text{cédé}} = -W$.

On peut calculer W à l'aide du premier principe appliqué au système {gaz} lors d'un cycle : $0 = \Delta U = W + Q = W + Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = W + Q_{12} + Q_{34}$. On a donc $W_{\text{cédé}} = -W = Q_{12} + Q_{34}$.

Le rendement est donc $\eta = \dfrac{\text{utile}}{\text{coût}} = \dfrac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{34}} = \dfrac{-T_1 + T_3}{T_3}$ car les facteurs $nR \ln \rho$ se simplifient. On a donc $\boxed{\eta = 1 - \dfrac{T_1}{T_3} = 0.500}$.

Le commentaire attendu est que l'expression obtenue pour η est la même que pour le cycle de Carnot réversible.