

Révisions

Sujet écrit

Correction – Centrale TSI 2015 physique-chimie 2

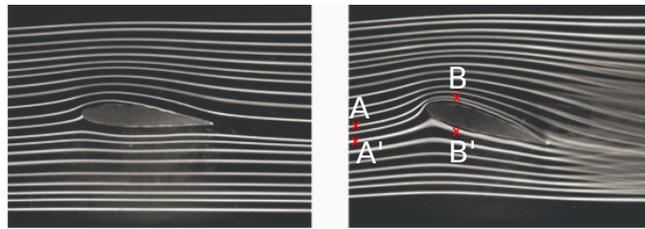
I – Étude du vol d'un avion

I.A – Pourquoi un avion vole-t-il ?

I.A.1 – L'écoulement d'air est supposé incompressible. On a donc la propriété suivante : plus les lignes de courant sont resserrées, plus la vitesse est importante.

On voit ici (surtout sur la deuxième image), que les lignes de courant sont plus resserrées sur l'extrados que sur l'intrados. L'écoulement est donc plus rapide sur l'extrados que sur l'intrados.

I.A.2 – Écoulement stationnaire, incompressible, d'un fluide parfait : on peut utiliser la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant.



On utilise aussi le fait que les points A et A' sont proches et situés dans la zone non perturbée de l'écoulement, donc la vitesse et la pression y sont égales (on les note v_0 et p_0).

Sur l'extrados, entre A et B :

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_0^2 + gz_A = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B \quad (1)$$

Sur l'intrados, entre A' et B' :

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_0^2 + gz_{A'} = \frac{p_{B'}}{\rho} + \frac{1}{2}v_{B'}^2 + gz_{B'} \quad (2)$$

I.A.3 – On soustrait les deux relations précédentes :

$$\frac{p_B - p_{B'}}{\rho} + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_{B'}^2) + g(z_B - z_{B'}) = g(z_A - z_{A'}), \quad (3)$$

d'où

$$p_{B'} - p_B = \underbrace{\frac{\rho}{2}(v_B^2 - v_{B'}^2)}_{>0} + \underbrace{\rho g(z_B - z_{B'})}_{>0} + \underbrace{\rho g(z_{A'} - z_A)}_{\simeq 0}. \quad (4)$$

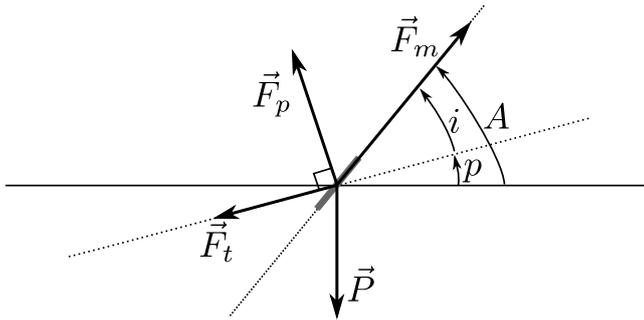
On a $(z_{A'} - z_A) \simeq 0$ car on peut prendre les lignes de courant aussi proche que l'on veut.

L'énoncé demande également de justifier que $\rho g(z_{B'} - z_B)$ est négligeable devant les autres termes. Ce n'est pas vraiment possible de le faire sans plus d'informations sur les vitesses et les pressions...

On voit de toute façon que $\boxed{p_{B'} - p_B > 0}$. La pression étant plus forte en B' sous l'aile que sur l'aile en B , la résultante des forces de pression sur l'aile est dirigée vers le haut.

I.B – Mécanique du vol d'un avion

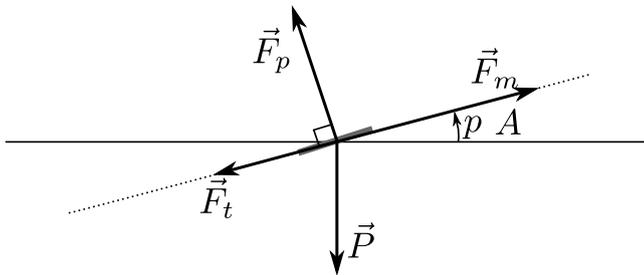
I.B.1 – a -



- b - Référentiel terrestre supposé galiléen, système : {avion}. On applique le principe fondamental de la dynamique, en utilisant le fait que $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ car le mouvement est rectiligne uniforme. On a donc

$$\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = \vec{0}. \quad (5)$$

On est dans le cas où $i = 0$:



On projette sur l'axe de l'avion :

$$-mg \sin(p) + F_m - F_t = 0, \text{ soit } F_m = mg \sin(p) + F_t. \quad (6)$$

On projette sur l'axe orthogonal à l'avion :

$$-mg \cos(p) + F_p = 0, \text{ soit } F_p = mg \cos(p). \quad (7)$$

- c - D'après la dernière équation, on a $\frac{1}{2} \rho S v^2 C_p = F_p = mg \cos(p) = mg \cos A$.

$$\text{D'où le résultat } v = \sqrt{\frac{2mg \cos A}{\rho S C_p}}. \quad (8)$$

- d - Le moteur est responsable de la force \vec{F}_m , la puissance associée est donc

$$\mathcal{P}_m = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = \|\vec{F}_m\| v. \quad (9)$$

Homogénéité de \mathcal{P}_{m0} : le terme C_t/C_p est sans dimension, le terme mg est une force, et le terme sous la racine est une vitesse (d'après l'expression de v question précédente). On a donc bien une puissance.

$$f_0 = 30 \text{ et } \mathcal{P}_{m0} = 20 \text{ kW.}$$

- e - Si $A \ll 1$ (en radians), ce qui est bien le cas si $A < 10^\circ = 0.17 \text{ rad}$, alors $\sin A \sim A$ et $\cos A \sim 1$. On a donc

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{m0}(1 + f_0 A). \quad (10)$$

On inverse cette relation pour isoler A :

$$A = \frac{1}{f_0} \left(\frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_{m0}} - 1 \right) = 5.0 \times 10^{-2} \text{ rad} = 2.9^\circ. \quad (11)$$

(attention, l'A.N. donne le résultat en radians, on convertit ensuite en degrés).

On trouve bien A petit, ce qui justifie d'avoir utilisé les développements limités pour cosinus et sinus.

f - En projetant \vec{v} on a $v_z = v \sin A$. On utilise l'expression de v :

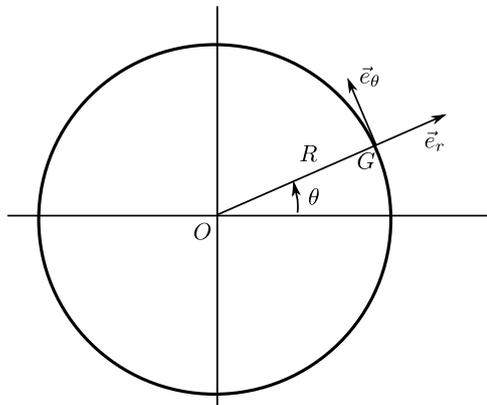
$$v_z = \sqrt{\frac{2mg \cos A}{\rho S C_p}} \sin A = 1.3 \text{ m/s.} \quad (12)$$

g - $\eta = \frac{F_p}{mg} = \cos A$ d'après la question b. On trouve donc $\eta \simeq 1$: l'avion n'est pas détruit.

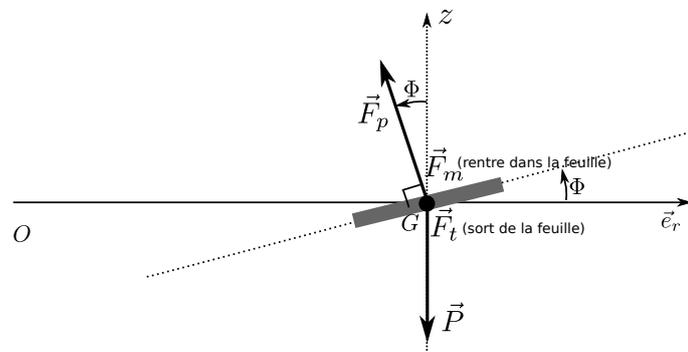
I.B.2 – a - Référentiel terrestre supposé galiléen, système : {avion}. On applique le principe fondamental de la dynamique, avec \vec{v} la vitesse du point G :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t. \quad (13)$$

b -



vue de dessus



vue de derrière

c - On a une trajectoire circulaire uniforme de centre O et de rayon R , parcourue à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \text{cst}$. Donc pour le point G :

$$\begin{cases} \vec{OG} = R\vec{e}_r, \\ \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad (\text{et donc } v = R\dot{\theta}), \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r. \end{cases} \quad (14)$$

Finalement :

$$-\frac{mv^2}{R}\vec{e}_r = -mg\vec{e}_z + F_m\vec{e}_\theta + F_p(\cos\Phi\vec{e}_z - \sin\Phi\vec{e}_r) - F_t\vec{e}_\theta. \quad (15)$$

Projections :

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{R} = F_p \sin\Phi, \\ mg = F_p \cos\Phi, \\ F_m = F_t. \end{cases} \quad (16)$$

On élimine F_p en prenant le rapport des deux premières équations. On en déduit $R = \frac{v^2}{g \tan\Phi}$.

d - $\eta = \frac{F_p}{mg} = \frac{1}{\cos\Phi}$.

e - $\eta < \eta_{\max}$ impose, d'après la relation précédente, $\cos \Phi > 1/\eta_{\max}$. L'angle Φ maximal est donc Φ_{\max} , tel que $\cos \Phi_{\max} = 1/\eta_{\max}$.

Il correspond à un rayon minimal $R_{\min} = \frac{v^2}{g \tan \Phi_{\max}} = \frac{v^2}{g \sqrt{\eta_{\max}^2 - 1}}$ (qui dépend de la vitesse).

II – Solar Impulse 2, une structure en matériaux composites

II.A

II.A – La structure présente d'importants espaces vides. La densité est donc faible.

II.B – Comparaison des densités

II.B.1 – L'aluminium possède 13 électrons. On a donc la structure électronique : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$.

Les électrons de la couche $n = 3$ sont les électrons de valence (il y en a donc 3). Les autres sont ceux de cœur.

II.B.2 – L'aluminium est situé dans la troisième ligne car sa couche $n = 3$ est partiellement remplie.

Il est situé dans la $10+3 =$ treizième colonne car il possède trois électrons de valence (les 10 correspondent aux 10 colonnes de la couche d, voir une classification périodique).

II.B.3 – Les ingénieurs recherchent des matériaux de faible densité. D'où ces choix. (Il faut cependant aussi que les matériaux possèdent une certaine résistance, qui n'est pas chiffrée ici : la discussion n'a donc pas beaucoup d'intérêt.)

II.B.4 – La masse de matériau composite est de $20\% \times 22500 \text{ kg} = 4500 \text{ kg}$. Soit un volume de matériau composite de $V = \frac{4500 \text{ kg}}{1.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} = 2.5 \text{ m}^3$.

Si ce volume était un alliage d'aluminium-cuivre, sa masse serait de $2.5 \text{ m}^3 \times 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 = 6.8 \times 10^3 \text{ kg}$.

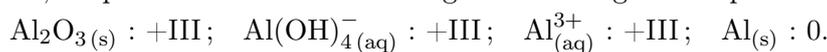
En remplaçant ces matériaux composites par un alliage, la masse augmenterait donc de $6800 - 4500 = 2300 \text{ kg}$.

Ceci représente environ 10% de la masse initiale, et est donc significatif. D'où l'intérêt.

II.C – Étude des dégradations par corrosion

II.C.1 – a -

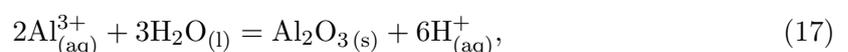
★ On utilise le fait que le nombre d'oxydation de l'oxygène est -II et celui de l'hydrogène +I, et que la somme des n.o. est égale à la charge de l'espèce chimique. Donc :



★ On attribue le domaine D à $\text{Al}_{(\text{s})}$ car il est le seul à avoir un n.o. strictement inférieur à tous les autres.

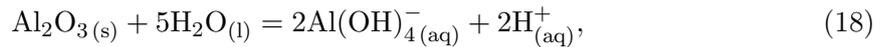
Pour le n.o. +III, les frontières verticales séparent des couples acide/base avec l'acide à gauche (pH le plus faible) et la base à droite.

Il faut donc voir qui est l'acide entre $\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}$ et $\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})$: on a la réaction



du type $\text{AH} = \text{A}^- + \text{H}^+$ avec AH l'acide, donc le couple acide/base est $\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}/\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})$.

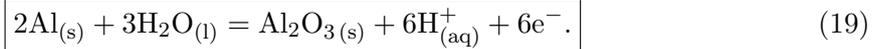
De même entre $\text{Al}(\text{OH})_4^-$ et Al_2O_3 : on a la réaction



donc le couple acide/base est $\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})/\text{Al}(\text{OH})_4^-$.

On a donc forcément domaine A = $\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}$; domaine B = $\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})$; domaine C = $\text{Al}(\text{OH})_4^-$.

b - Il s'agit de la frontière du couple oxydant/réducteur $\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})/\text{Al}(\text{s})$. On écrit la demi-équation :



Puis on écrit l'équation de Nernst associée :

$$E = E_{\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})/\text{Al}(\text{s})}^0 + \frac{0.06}{6} \log [\text{H}^+]^6 = E_{\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})/\text{Al}(\text{s})}^0 - 0.06 \text{ pH} \quad (\text{V}). \quad (20)$$

La pente est donc de -0.06 u.pH par volt.

c - On étudie maintenant la frontière entre l'oxydant $\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}$ et le réducteur $\text{Al}(\text{s})$. La demi-équation est



et la formule de Nernst donne :

$$E = E_{\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}/\text{Al}(\text{s})}^0 + \frac{0.06}{3} \log [\text{Al}^{3+}] = E_{\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}/\text{Al}(\text{s})}^0 + \frac{0.06}{3} \log c_{\text{tracé}} \quad (\text{V}). \quad (22)$$

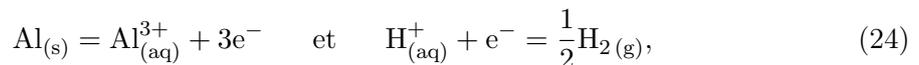
On en déduit

$$E_{\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}/\text{Al}(\text{s})}^0 = E - 0.02 \log c_{\text{tracé}} = -1.67 \text{ V}. \quad (23)$$

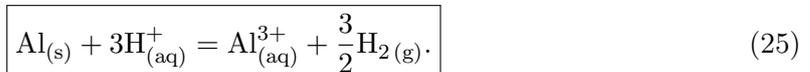
(on lit $E = -1.71 \text{ V}$ à la frontière sur le graphique)

II.C.2 – **a** - Cas de la plaque B : On la décape, il n'y a donc rien de spécial à sa surface, que de l'aluminium $\text{Al}(\text{s})$.

Une fois trempée dans la solution à $\text{pH} = 1$, l'eau $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ attaque l'aluminium $\text{Al}(\text{s})$ ($\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ et $\text{Al}(\text{s})$ ont des domaines disjoints à bas pH). Les demi-équations impliquées sont :



et l'équation de la réaction est :



Le gaz dégagé est du dihydrogène.

b - Cas de la plaque A : lors du trempage dans l'eau aérée à pH neutre, l'aluminium $\text{Al}(\text{s})$ est attaqué par le dioxygène $\text{O}_2(\text{aq})$. Ceci se voit sur le diagramme E-pH car les domaines de ces deux espèces chimiques sont disjoints. L'aluminium $\text{Al}(\text{s})$ est alors oxydé en $\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})$, qui va former une couche solide protectrice à la surface de la plaque (c'est un solide, il n'est donc pas soluble dans l'eau).

Ceci explique le peu de réaction lorsqu'on trempe ensuite la plaque dans la solution d'acide.

c - On peut, car l'aluminium sera oxydé en $\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})$, qui formera en surface une fine couche protectrice. Il s'agit de passivation.

(**Remarque** : encore faut-il que la couche d'oxyde soit imperméable; c'est bien le cas pour $\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s})$.)

III – Fonctionnement et technologie de l'accéléromètre

III.A – Étude mécanique du capteur

III.A.1 – a - ★ On note l_1 l'allongement du ressort 1. On a $\vec{T}_1 = -k(l_1 - l_0)\vec{e}_x$ (signe moins car si $l_1 > l_0$ alors le ressort est étiré et la force doit être dirigée vers la gauche).

Il faut déterminer $(l_1 - l_0)$. Lorsque $x_C = x_B$ le ressort est à l'équilibre : on note $l_{\text{éq}}$ sa longueur. Lorsque $x_C \neq x_B$, on a $l_1 = l_{\text{éq}} + x_C - x_B$.

Donc $\vec{T}_1 = -k(l_{\text{éq}} + x_C - x_B - l_0)\vec{e}_x$.

★ Pour le second ressort, on note l_2 son allongement. On a cette fois $l_2 = l_{\text{éq}} - (x_C - x_B)$.

Et on a d'autre part $\vec{T}_2 = +k(l_2 - l_0)\vec{e}_x$ (signe + car lorsque $l_2 > l_0$ le ressort est étiré et il faut que la force résultante soit vers la droite).

Donc $\vec{T}_2 = +k(l_{\text{éq}} - (x_C - x_B) - l_0)\vec{e}_x$.

★ Finalement on a $\boxed{\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -2kX\vec{e}_x}$.

b - Référentiel terrestre supposé galiléen, système {masse mobile de masse m et repérée par x_C }. On écrit le principe fondamental de la dynamique en prenant en compte toutes les forces listées dans l'énoncé :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F}_f. \quad (26)$$

On projette sur \vec{e}_x : $m \frac{dv_x}{dt} = -2kX - 2f(\dot{x}_C - \dot{x}_B)$.

Or $X = x_C - x_B$, donc $\dot{X} = \dot{x}_C - \dot{x}_B$.

Et $v_x = \dot{x}_C$, donc $v_x = \dot{X} + \dot{x}_B$ et $\frac{dv_x}{dt} = \ddot{X} + \ddot{x}_B = \ddot{X} + a$.

Donc finalement :

$$m\ddot{X} + ma = -2kX - 2f\dot{X}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{X} + \frac{2f}{m}\dot{X} + \frac{2k}{m}X = -a}, \quad (27)$$

ce qui donne la forme de l'énoncé à condition de poser $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et $Q = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{km}{2}}$.

c - ω_0 est une pulsation (radian par seconde). En régime libre, en l'absence d'amortissement (si $f = 0$), il s'agit de la pulsation à laquelle le système oscille librement. On l'appelle pulsation propre du système.

Q est le facteur de qualité (sans dimension). Plus il est grand, moins les frottements sont importants. Ainsi en régime libre plus Q est grand et plus le système oscillera longtemps librement avant de s'arrêter (Q donne d'ailleurs l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations).

III.A.2 – a - On est en régime sinusoïdal forcé, donc on cherche $\boxed{X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)}$.

b - On utilise les grandeurs complexes : $\underline{X} = \underline{X}_m \exp(j\omega t)$ et $\underline{a} = \underline{a}_m \exp(j\omega t)$.

L'équation du mouvement devient :

$$(j\omega)^2 \underline{X}_m + (j\omega) \frac{\omega_0}{Q} \underline{X}_m + \omega_0^2 \underline{X}_m = -\underline{a}_m. \quad (28)$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\underline{X}_m}{\underline{a}_m} = \frac{-1}{j \frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2 - \omega^2}}. \quad (29)$$

c - ★ Lorsque $\omega \rightarrow 0$, on a $\frac{\omega_0^2 \underline{X}_m}{a_m} \sim -1$.

★ Lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, on a $\frac{\omega_0^2 \underline{X}_m}{a_m} \sim \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$.

★ Selon la valeur de Q , il y aura une résonance ou non vers $\omega = \omega_0$.

★ Pour $\omega \ll \omega_0$, on s'attend donc à avoir $\frac{\omega_0^2 \underline{X}_m}{a_m} \simeq -1$.

On a alors $\underline{X}_m = -\frac{a_m}{\omega_0^2} = -\frac{m}{2k} a_m$, soit en notations réelles (on prend la partie réelle de cette égalité) :

$$\boxed{X(t) = -\frac{m}{2k} a(t)}. \quad (30)$$

d - D'après l'équation 29, on a

$$\boxed{\frac{\omega_0^2 \underline{X}_m}{a_m} = \frac{-1}{j \frac{x}{Q} + 1 - x^2}}. \quad (31)$$

e - Il faut prendre le module :

$$\left| \frac{\omega_0^2 \underline{X}_m}{a_m} \right| = \frac{1}{\frac{x^2}{Q^2} + (1 - x^2)^2} \quad (32)$$

et étudier quand il est maximal. C'est le cas lorsque le dénominateur est minimal. On dérive donc la fonction $g(x) = \frac{x^2}{Q^2} + (1 - x^2)^2$, et on résout $g'(x) = 0$ pour trouver le minimum (on admettra que c'est bien un minimum, on peut calculer la dérivée seconde et montrer qu'elle est positive si l'on n'est pas convaincu). Après calculs, on trouve qu'il est atteint en $x_r = \sqrt{\frac{1}{2Q^2} + 1}$.

Ceci correspond à $f_r = \omega_r / (2\pi) = \omega_0 x_r / (2\pi)$, soit $\boxed{f_r = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2Q^2} + 1}}$.

Pour $Q = 5$, ceci est très proche de $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ (on trouve $f_r = 1.01 f_0$).

f - On a $X(t) = -\frac{m}{2k} g = -\frac{g}{\omega_0^2} = -\frac{g}{(2\pi)^2 f_0^2}$.

On trouve $\boxed{X = 8 \text{ nm}}$.

III.B – Étude de la détection par une méthode électrostatique

III.B.1 – a - On s'intéresse à l'électrode fixe, qui est modélisée comme un plan infini uniformément chargé, de normale \vec{e}_x . Le plan est donc selon les axes y et z .

Il faut faire un schéma.

On utilise les coordonnées cartésiennes.

★ Symétries : On considère un point M au dessus du plan. Tous les plans contenant M et le vecteur \vec{e}_x sont plans de symétrie de la distribution de charges. Or $\vec{E}_1(M)$ est contenu dans ces plans. Donc $\boxed{\vec{E}_1(M) = E_x(M) \vec{e}_x}$.

★ Invariances : La distribution de charges est invariante par translation selon l'axe y et l'axe z . $E_x(M)$ ne dépend donc pas de y ni de z .

★ On a donc $\boxed{\vec{E}_1(M) = E_x(x) \vec{e}_x}$.

b - On considère un point M et son symétrique M' par rapport au plan chargé.

Comme ce plan est un plan de symétrie de la distribution de charges, on sait que le champ électrique est symétrique par rapport à ce plan.

On a donc $\vec{E}_1(M')$ qui est le symétrique de $\vec{E}_1(M)$ par rapport au plan. Ici ceci se traduit en $\boxed{\vec{E}_1(M') = -\vec{E}_1(M)}$.

c - Ici aussi faire un schéma.

On considère un point M de coordonnées (x, y, z) , avec $x > 0$. On considère son symétrique M' de coordonnées $(-x, y, z)$.

★ La surface de Gauss considérée est un cylindre d'axe \vec{e}_x , dont une face contient le point M et la face opposée le point M' . On note S la surface de sa base.

Le flux de \vec{E} à travers la surface du cylindre est $\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = SE_x(x) - SE_x(-x)$ car sur le tour du cylindre $\vec{E} \cdot \vec{dS} = 0$ et car sur les faces supérieures et inférieures \vec{E} est constant. Or $E_x(-x) = -E_x(x)$. Donc $\Phi = 2SE_x(x)$.

★ La charge intérieure est égale à $Q_{\text{int}} = \sigma \times S$.

★ Le théorème de Gauss indique que $2SE_x(x) = \sigma \times S/\epsilon_0$, donc on a $E_x(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, soit

$$\boxed{\vec{E}_1(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x} \text{ (valable pour } x > 0\text{)}. \text{ De l'autre coté du plan } (x < 0)\text{, on a } \boxed{\vec{E}_1(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x}.$$

d - ★ Dans l'espace inter-armature, le champ créé par l'armature fixe est $\vec{E}_1(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x$, et celui créé par l'armature mobile est $\vec{E}_2(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x$.

D'après le principe de superposition le champ électrique total $\vec{E}(M)$ est la somme de ces deux champs : $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_x}$.

★ La charge Q portée par l'électrode fixe est $Q = \sigma S$.

Notons B un point sur l'électrode fixe, et A un point sur celle mobile. La différence de potentiel U entre les deux électrodes est $U = (\text{potentiel de l'électrode fixe}) - (\text{potentiel de l'électrode mobile}) = V(B) - V(A)$, soit $U = -\int_A^B \vec{E}(M) \cdot \vec{dl} = \int_B^A \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_x \cdot dl \vec{e}_x = (e + X)\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

En multipliant par S en haut et en bas on a $\boxed{U = \frac{(e + X)Q}{S\epsilon_0}}$.

e - On a la relation $U = \frac{Q}{C}$, donc on en déduit $C = \frac{Q}{U} = \frac{S\epsilon_0}{e + X}$.

Pour $X = 0$ cette relation devient $C_0 = \frac{S\epsilon_0}{e}$.

Finalement, on peut écrire $\boxed{C = C_0 \frac{e}{e + X}}$.

f - L'armature fixe produit, au niveau de l'armature mobile, un champ $\vec{E}_1(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x$.

Ce champ étant uniforme, et la charge sur l'armature mobile étant également uniforme (égale en tout à $-\sigma S$), la force exercée par l'armature fixe sur l'armature mobile est $\vec{F} = -\sigma S \times \vec{E}_1(M) = -\sigma S \times \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x$.

Si l'on reprend l'expression de l'énoncé et que l'on remplace U et C_0 par les expressions trouvées précédemment, on obtient bien la même chose.

On a donc bien $\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2}C_0U^2 \frac{e}{(e + X)^2}\vec{e}_x}$.

g - On trouve $\boxed{F = 5 \times 10^{-8} \text{ N}}$.

h - Cette force correspond à une accélération de $F/m \sim 50 \text{ m/s}^2 \sim 5g$. Il sera donc difficile de mesurer des accélérations du boîtier de l'ordre de $1g$.

III.B.2 - **a** - Il faut comprendre que l'électrode fixe de gauche porte une charge surfacique $+\sigma$, l'électrode fixe de droite une charge $-\sigma$, et l'électrode mobile une charge $-\sigma$ sur sa face

de gauche et $+\sigma$ sur sa face de droite. L'électrode mobile est donc attirée par chacune des électrodes fixes.

La résultante des forces est

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}C_0 \left(V_a - \frac{-V_a X}{e} \right)^2 \frac{e}{(e+X)^2} \vec{e}_x + \frac{1}{2}C_0 \left(\frac{-V_a X}{e} - (-V_a) \right)^2 \frac{e}{(e-X)^2} \vec{e}_x = \vec{0}. \quad (33)$$

La résultante est nulle.

- b** - La force électrostatique perturbatrice présente dans le dispositif à une électrode fixe est donc absente. Ceci permet des mesures non perturbées et plus précises de l'accélération.

III.C – Traitement électronique du signal du capteur

III.C.1 – Cette chaîne ne convient pas car le signal utile est à fréquence nulle (c'est une constante). Il est donc situé dans la zone où le bruit est le plus élevé. Le SNR sera donc faible, et le signal utile noyé dans le bruit.

III.C.2 – **a** - Il faut utiliser un filtre passe bande, dont la bande passante est centrée sur la fréquence f_m , et est la plus étroite possible (donc il faut un facteur de qualité important).

- b** - On prend le module de l'expression donnée :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}, \quad \text{puis} \quad \boxed{G = 20 \log |\underline{H}| = -10 \log (1 + Q^2(x - 1/x)^2)}. \quad (34)$$

c - Le gain est maximal lorsque $|\underline{H}|$ est maximal, donc lorsque le dénominateur $1 + Q^2(x - 1/x)^2$ est minimal, donc lorsque $(x - 1/x)^2$ est minimal, donc pour $x = 1$. Ceci correspond à $\boxed{f = f_0}$.

d - La bande passante est centrée sur $f_0 = 200$ kHz, ce qui correspond au minimum du spectre du bruit.

La bande passante est suffisamment étroite, dans le sens où elle permet d'atténuer significativement les domaines en dessous de 10^3 Hz et au dessus de 10^7 Hz qui correspondent aux zones où l'amplitude du bruit est importante.

Pour déterminer Q , on lit sur le diagramme $f_0 \simeq 2.5 \times 10^5$ Hz, et un Δf à -3dB d'environ 2.5×10^5 Hz.

On a donc $\boxed{Q \simeq 1}$.

e - \star Avant filtrage, le signal est $V_2(t) = G_d V_c' \cos(\omega_m t)$. Donc $\boxed{\mathcal{P}_{\text{signal avant}} = \frac{1}{2} G_d^2 V_c'^2}$. (On utilise le fait que la valeur moyenne de $\cos^2(\omega_m t)$ sur une période est égale à $1/2$.)

\star Après filtrage : l'amplitude du signal est multipliée par $|\underline{H}(f_m)|$, qui est ~ 1 car $f_m \simeq f_0$ et on voit sur la figure 13 que le gain est alors nul.

La puissance est donc la même : $\boxed{\mathcal{P}_{\text{signal après}} = \frac{1}{2} G_d^2 V_c'^2}$.

f - On a $\text{SNR}_{\text{avant}} = 10 \log \frac{\mathcal{P}_{\text{signal avant}}}{\mathcal{P}_{\text{bruit avant}}} = 10 \log \frac{\frac{1}{2} G_d^2 V_c'^2}{\mathcal{P}_{\text{bruit avant}}}$, et $\text{SNR}_{\text{après}} = 10 \log \frac{\mathcal{P}_{\text{signal après}}}{\mathcal{P}_{\text{bruit après}}} = 10 \log \frac{\frac{1}{2} G_d^2 V_c'^2}{\mathcal{P}_{\text{bruit avant}}/Q}$.

On a donc gagné un facteur Q , soit en dB un gain de $10 \log Q$.

g - $10 \log Q = 20$ si $Q = 100$. Ceci est possible, mais difficilement avec des filtres classiques.

III.D – Le silicium, utilisé dans la fabrication des accéléromètres

III.D.1 – a - ★ D'après la relation de Van't Hoff : $\frac{d \ln K_1^0}{dT} = \frac{\Delta_r H_1^0}{RT^2}$.

Sur les graphiques on voit que $\frac{d \ln K_1^0}{dT} > 0$. On a donc $\Delta_r H_1^0 > 0$. La réaction est endothermique.

★ On intègre la relation de Van't Hoff : $\ln K_1^0(T) = -\frac{\Delta_r H_1^0}{RT} + \text{constante}$.

On utilise alors le graphique qui donne $y = \ln K_1^0$ en fonction de $x = 1/T$, puisqu'on vient de montrer qu'on doit avoir $y = ax + b$ avec $a = -\Delta_r H_1^0/R$.

Sur ce graphique il est indiqué que $a = -125042 \text{ mK}$, soit -125.043 K .

On a donc $\Delta_r H_1^0 = R \times 125.043 \text{ K} \simeq 10 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 125.043 \text{ K}$,

soit $\Delta_r H_1^0 = 1.3 \text{ kJ/mol}$.

b - Le principe de Le Châtelier indique que si la température augmente (à pression constante), alors l'équilibre est déplacé dans le sens endothermique. Ici le sens endothermique est le sens direct. L'équilibre est donc déplacé dans le sens direct.

On en déduit que l'industriel a intérêt à travailler à haute température.

III.D.2 – a - On lit dans les données que seul Si change d'état à 1730 K pour devenir liquide. Donc on a l'équation (1') :



b - ★ À l'équilibre on a la relation $K_{1'}^0 = Q_r$.

On a ici $Q_r = \left(\frac{p_{\text{CO}}}{p^0}\right)^4$.

On en déduit qu'à l'équilibre, $p_{\text{CO}} = p^0 (K_{1'}^0)^{1/4} = 1.39 \times 10^6 \text{ bar}$.

★ Cherchons la quantité de matière n_{CO} à l'équilibre.

On utilise la loi des gaz parfaits : $n_{\text{CO}} = p_{\text{CO}}V/(RT)$. Attention à écrire la pression en pascal.

On trouve alors $n_{\text{CO}} = 7.7 \times 10^4 \text{ mol}$.

On peut d'ores et déjà dire que c'est impossible, étant donné qu'on a initialement introduit seulement $n = 32/64 = 0.5 \text{ mol}$ de $\text{CaC}_{2(s)}$.

On rend cet argument plus précis dans la suite :

★ Il faut ensuite faire un tableau d'avancement pour en déduire l'avancement à l'équilibre $\xi_{\text{éq}}$:

	$2 \text{CaC}_{2(s)}$	$+ 3 \text{SiO}_{2(s)}$	$= 2 \text{CaO}_{(s)}$	$+ 4 \text{CO}_{(g)}$	$+ 3 \text{Si}_{(l)}$
E.I.	n_{10}	n_{20}	0	0	0
ξ	$n_{10} - 2\xi$	$n_{20} - 3\xi$	2ξ	4ξ	3ξ
E.F.	$n_{10} - 2\xi_f$	$n_{20} - 3\xi_f$	$2\xi_f$	$4\xi_f$	$3\xi_f$

On a supposé que l'état final est un état d'équilibre, donc $\xi_f = \xi_{\text{éq}}$.

On a donc à l'équilibre $n_{\text{CO}} = 4\xi_{\text{éq}}$, soit $\xi_{\text{éq}} = n_{\text{CO}}/4 = 1.93 \times 10^4 \text{ mol}$.

★ Pour comparer avec la quantité de matière introduite pour les réactifs, il faut calculer celle-ci.

Concernant $\text{CaC}_2(\text{s})$, on a initialement $n_{10} = \frac{m_{\text{CaC}_2}}{M_{\text{CaC}_2}}$. On trouve $M_{\text{CaC}_2} = 64 \text{ g/mol}$. On a donc $n_{10} = 0.5 \text{ mol}$.

Concernant $\text{SiO}_2(\text{s})$, on a initialement $n_{20} = \frac{m_{\text{SiO}_2}}{M_{\text{SiO}_2}}$. On trouve $M_{\text{SiO}_2} = 60 \text{ g/mol}$. On a donc $n_{20} = 0.3 \text{ mol}$.

★ Calculons la quantité de $\text{SiO}_2(\text{s})$ dans l'état final : $n_{2f} = n_{20} - 3\xi_{\text{éq}} = 0.3 \text{ mol} - 3 \times 1.9 \times 10^4 \text{ mol} < 0$.

Ceci signifie qu'il y a rupture d'équilibre : l'état final n'est pas un état d'équilibre, car un des réactifs solides est totalement consommé.

c - Il y a rupture d'équilibre. La réaction est donc totale, et $\xi_f = \xi_{\text{max}}$.

★ Il faut d'abord voir qui est le réactif limitant.

Si c'est $\text{CaC}_2(\text{s})$, alors on a $n_{10} - 2\xi_{\text{max}} = 0$, soit $\xi_{\text{max}} = n_{10}/2 = 0.25 \text{ mol}$.

Si c'est $\text{SiO}_2(\text{s})$, alors on a $n_{20} - 3\xi_{\text{max}} = 0$, soit $\xi_{\text{max}} = n_{20}/3 = 0.1 \text{ mol}$.

Le réactif limitant est donc $\text{SiO}_2(\text{s})$, et on a $\xi_{\text{max}} = 0.1 \text{ mol}$.

★ Le tableau d'avancement permet d'en déduire la composition dans l'état final :

$$n_{\text{SiO}_2} = 0,$$

$$n_{\text{CaC}_2} = n_{10} - 2\xi_{\text{max}} = 0.3 \text{ mol},$$

$$n_{\text{CO}} = 4\xi_{\text{max}} = 0.4 \text{ mol},$$

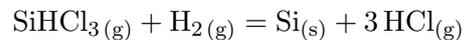
$$n_{\text{Si}} = 3\xi_{\text{max}} = 0.3 \text{ mol},$$

$$n_{\text{CaO}} = 2\xi_{\text{max}} = 0.2 \text{ mol},$$

★ On calcule enfin la pression. Le monoxyde de carbone est le seul gaz présent. On a

$$p_{\text{CO}} = n_{\text{CO}}RT/V \simeq 7.2 \text{ bar}.$$

III.D.3 - a -



b - Zéro et zéro, car ces composés physico-chimiques sont dans l'état standard de référence de l'élément correspondant.

c - On utilise la loi de Hess et le tableau de données :

$$\Delta_r H_2^0 = 3 \Delta_f H^0(\text{HCl}(\text{g})) + \Delta_f H^0(\text{Si}(\text{s})) - \Delta_f H^0(\text{H}_2(\text{g})) - \Delta_f H^0(\text{SiHCl}_3(\text{g})) = 212 \text{ kJ/mol}.$$

d - On utilise la loi de Le Châtelier pour la pression : une diminution de la pression déplace l'équilibre dans le sens qui augmente la quantité de matière de gaz. Pour cette équation de réaction, il s'agit du sens direct.

L'équilibre est donc déplacé dans le sens direct suite à une baisse de pression. C'est pourquoi la réaction est réalisée sous 0.1 bar plutôt que sous 1 bar.